Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis, Vektor-, Wahrscheinlichkeitsrechnung
> Coronavirus

Aufgabe: *Teil A* [Analysis]: Der erstmals Ende 2019 in China aufgetretene Coronavirus verursacht die grippeähnliche, unter Umständen tödlich verlaufende Erkrankung Covid-19 u.a. einhergehend mit Fieber, Husten und Lungenentzündung oder auch keinen oder geringen Symptomen. Die Krankheit breitet sich weltweit als Pandemie aus.

a) In der Bundesrepublik Deutschland (Einwohnerzahl: 82 Millionen) waren Anfang März 2020 200 Personen, am 26. März 42300 Personen nachweislich infiziert (kumulierte Zahlen des Robert-Koch-Instituts, Berlin). Bestimme eine Funktionsvorschrift $f_g(t)$ (g: gemeldet, t in Tagen ab Anfang März 2020) für die Fallzahlen, wenn von einem exponentiellen Wachstum bei der Zahl der Erkrankten ausgegangen werden kann. Mit wie viel gemeldeten Erkrankten kann für den 3. April gerechnet werden, wie groß ist die prozentuale Zunahme innerhalb eines Tages, wie groß die Zunahme an gemeldeten Erkrankten Ende März, wie groß die Verdopplungszeit? Stelle die Funktion $f_g(t)$ in einem t-y-Koordinatensystem dar ($0 \le t \le 40$).

b) Die Zahl der wirklich an Covid-19 Infizierten ist auf Grund einer relativ hohen Dunkelziffer in Deutschland geschätzt fünf Mal größer. Wie lautet die entsprechende exponentielle Wachstumsfunktion f(t) (t in Tagen ab Anfang März 2020)? Wann würden gemäß dieser Beziehung 70 Prozent der Bevölkerung in Deutschland von Covid-19 erfasst sein? Stelle dar, aus welchem Grund hierbei die Annahme exponentiellen Wachstums falsch ist. Stelle die Funktion f(t) in einem t-y-Koordinatensystem dar ($0 \le t \le 40$).

c) Bis zum 26. März sind 253 Todesfälle registriert worden, bis zum Tag davor 55 Todesfälle weniger. Ermittle unter der Annahme exponentiellen Wachstums die diesbezügliche Funktionsvorschrift g(t) (t in Tagen ab Anfang März 2020). Die Sterblichkeit r(t) lässt sich nun als Quotient g(t)/f(t) darstellen. Berechne r(t). Vergleiche die mittleren Sterberaten der ersten Märzwoche mit der der ersten Aprilwoche. Welche Aussagen können über die Sterberate von Covid-19 gemacht werden?

d) Die von der Regierung der Bundesrepublik Deutschland beschlossenen Maßnahmen sehen ab dem 15. März eine weitgehende Reduzierung von Sozialkontakten vor. Damit soll die Zunahme der Infektionen mit dem Coronavirus fürs Erste begrenzt werden. Die Maßnahmen wirken wegen der Inkubationszeit von Covid-19 erst nach zwei bis vierzehn Tagen, also im Mittel nach rund 6 Tagen. Wie sieht also eine lineare Wachstumsfunktion w(t) (t in Tagen ab Anfang März 2020) aus, deren Zunahme der Zunahme der Funktion f(t) am 21. März entspricht? Bei wie vielen Menschen kann dadurch der Ausbruch der Krankheit bis zum 9. April verhindert werden?

e) Zu beachten ist nun, dass Covid-19 in rund 80 Prozent der Fälle mit keinen, geringen oder moderaten Symptomen verläuft und dass 1,5 Prozent der Erkrankten (Schwerstkranke) auf der Intensivstation eines Krankenhauses behandelt werden müssen. Es soll daher angenommen werden, dass die Anzahl der jeweils aktuell Schwerstkranken einer Gaußschen Glockenkurve vom Typ:

$$h(t) = ae^{-\frac{(t-b)^2}{c}} \quad \text{(t in Monaten ab März 2020)}$$

entspricht, wenn es keine (weitergehenden) Maßnahmen zur Eindämmung der Pandemie gibt. Bestimme die Parameter a, b, c, wenn unter Berücksichtigung der Fallzahl von Anfang März 2020 die Krankheit über ein Jahr lang auftritt und die Anzahl der für die Auslastung des deutschen Gesundheitssystems relevanten Schwerstkranken maximal 80000 beträgt. Wann ist nach diesem Modell die stärkste Zunahme erreicht, wann der Höhepunkt? Wann überschreitet die Zahl der Schwerstkranken die der (aufgestockten) 54000 Intensivbetten, von denen wegen der Kranken mit anderen schweren Krankheiten nur 65 Prozent genutzt werden können?

Teil B [Vektorrechnung]: Die Einschränkung von Sozialkontakten bewirkt, dass z.B. VerkäuferInnen und KassiererInnen in Supermärkten vor einer Coronainfektion geschützt werden müssen. Insbesondere eine Tröpfcheninfektion gilt es zu vermeiden.

a) Die Gesichter von Kunde und Kassiererin werden in der x_2-x_3-Ebene des kartesischen x_1-x_2-x_3-Koordinatensystems durch die Punkte P(0|0|18) und Q(0|8|12) dargestellt, der Supermarktboden ist die x_1-x_2-Ebene (1 Längeneinheit entspricht 10 Zentimetern). Wie weit sind die Gesichter auseinander, wenn ein Mindestabstand von 1,5 Metern gelten soll?

b) Zum Schutz der Kassiererin befindet sich zwischen ihr und dem Kunden eine Plexiglasscheibe, die senkrecht zum Supermarktboden reicht. Die drei Ecken A(-5|5|20), B(5|5|-2) und C(5|5|0) der Scheibe sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Ergänze das Dreieck durch die fehlende Ecke D zu einem Parallelogramm und zeige, dass dieses Parallelogramm ein Rechteck ist. Berechne den Flächeninhalt der Scheibe. Bestimme die Gleichung der Ebene, in der die Ecken der Scheibe liegen.

c) Durch das Husten des Kunden bewegt sich ein Speicheltröpfchen (angenähert) auf einer Geraden g von P nach Q. An welchem Punkt S erreicht das Tröpfchen die Schutzscheibe?

d) Dreht der Kunde beim Husten den Kopf, so kann das Tröpfchen sich auch in andere Richtungen bewegen. Dies wird dargestellt durch das Geradenbüschel:

$$g_a:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} a \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ (a reell, Parameter r).}$$

Für welche a endet der Weg des Tröpfchens an der Plexiglassscheibe? Für welche a ist der Winkel der Geraden g_a zur Senkrechten des Koordinatensystems 60° groß?

e) Es sei nun a = 10. Wie nah kommt ein Tröpfchen, das entlang der Geraden g_{10} sich an der Plexiglasscheibe vorbeibewegt, dem Kopf der Kassiererin?

Teil C [Wahrscheinlichkeitsrechnung]: Es gilt das in *Teil A* Gesagte bzgl. der Funktion f(t) und der am Coronavirus Infizierten.

a) Ab dem 5. April 2020 wird ein Kurztest zur Erkennung des Coronavirus in Deutschland verwendet. Der Test erkennt bei Infizierten zu 95 Prozent den Virus, bei Nichtinfizierten wird fälschlicherweise zu 1 Prozent eine falsche Diagnose angegeben. Stelle die Situation in einem Baumdiagramm dar (I = infiziert, NI = nicht infiziert, + = positiv getestet, – = negativ getestet). Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten, dass 1) eine Person positiv getestet wird, 2) eine Person infiziert und positiv getestet ist, 3) eine positiv getestete Person infiziert ist, 4) eine infizierte Person positiv getestet wird.

b) Infolge von Belegungsengpässen ist in einem Großklinikum die Sterberate zwischenzeitlich auf 6 % angestiegen. Bestimme unter der Voraussetzung einer Binomialverteilung bei 220 an Covid-19 Erkrankten die Wahrscheinlichkeiten, dass 1) genau 6 Patienten, 2) höchstens 10 Patienten, 3) über 15 Patienten, 4) zwischen 5 und 12 Patienten sterben.

c) Ein Derivat des Medikaments Chloroquin soll im Großklinikum Abhilfe schaffen. Das Medikament wird 160 Patienten verabreicht; ein Signifikanztest zum Signifikanzniveau von 5 % soll entscheiden, ob das Medikament wirksam ist. Von den 160 Patienten sterben drei. Erstelle das Testszenario und entscheide auf der Grundlage der Sterbefälle.

Lösung: *Teil A*: a) I. Zur Ermittlung einer Exponentialfunktion $f_g(t) = ce^{kt}$ werde der Zeitpunkt t = 0 mit Anfang März 2020 identifiziert, die Zeit t in Tagen gezählt. Offensichtlich müssen die zwei Punkte P(0|200) und Q(26|42300) auf der Kurve von $f_g(t)$ liegen. Somit gilt:

P(0|200): $f_g(0) = ce^{k\cdot 0} = c = 200$.

Mit c = 200 erhalten wir als Zwischenresultat: $f_g(t) = 200\cdot e^{kt}$. Wir bestimmen den Proportionalitätsfaktor k vermöge:

Q(26|42300): $f_g(26) = 200 \cdot e^{k \cdot 26} = 42300 \Rightarrow e^{k \cdot 26} = 211{,}5 \Rightarrow 26k = 5{,}354 \Rightarrow k = 0{,}206$.

Wir setzen k = 0,206 in die Funktionsvorschrift ein. Die gesuchte Exponentialfunktion lautet damit: $f_g(t) = 200 \cdot e^{0{,}206t}$.

II. Die Auswertung der Wachstumsfunktion ergibt nun mit $f'(t) = 200 \cdot 0{,}206 \cdot e^{0{,}206t} = 41{,}2 \cdot e^{0{,}206t}$:

t = 34 (entspricht dem 3. April 2020): $f_g(34) = 220206$
t = 31 (entspricht dem 31. März 2020): $f_g'(31) = 24451$.

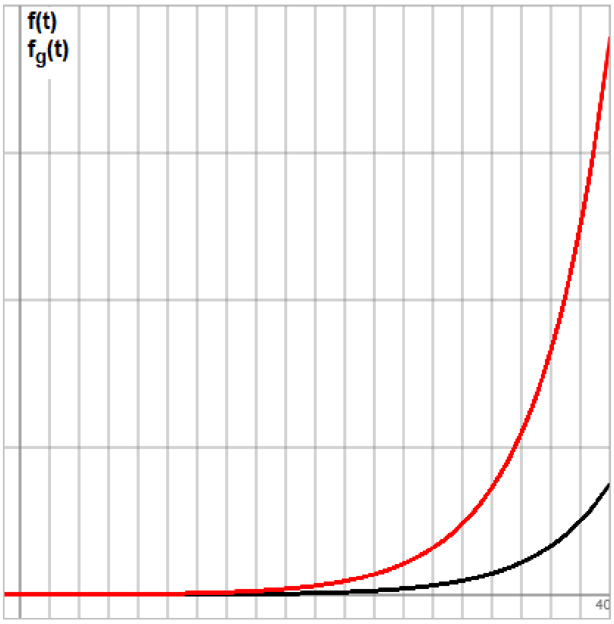
Am 3. April müssten also 220206 Personen als infiziert gemeldet sein. Am 31. März beträgt die Zunahme der als infiziert gemeldeten Personen 24451. Die (gleich bleibende) prozentuale Zunahme pro Tag beträgt:

$f_g(1)/f_g(0) = e^{0{,}206} = 1{,}229 \Rightarrow$ prozentuale Zunahme = 122,9 % – 100 % = 22,9 %.

III. Die Verdopplungszeit errechnet sich aus der Formel $T_V = \frac{\ln(2)}{k}$ als:

$T_V = \ln(2)/0{,}206 = 3{,}36$ Tage.

Alle drei bis vier Tage verdoppelt sich also die Zahl der Infizierten.



b) I. Die Wachstumsfunktion betreffend die Fallzahlen der wirklich am Coronavirus Infizierten bestimmt sich als:

$f(t) = 5 \cdot f_g(t) = 1000 \cdot e^{0{,}206t}$.

II. Mit $f(t) = 0{,}7 \cdot 82000000 = 57400000$ (70 Prozent der Bevölkerung in Deutschland) ergibt sich:
$1000 \cdot e^{0{,}206t} = 57400000 \Leftrightarrow e^{0{,}206t} = 57400 \Leftrightarrow 0{,}206t = 10{,}958 \Leftrightarrow t = 53{,}2$ Tage

und somit ungefähr der 22. April 2020 als der Zeitpunkt, an dem 70 Prozent der Gesamtbevölkerung von der Pandemie betroffen sind.

III. Ein exponentielles Wachstum über einen längeren Zeitraum anzunehmen führt bei der Extrapolation der Wachstumsvorschrift in die Zukunft zu massiven Abweichungen von der „realen" Situation. Dies resultiert vornehmlich daraus, dass das unbeschränkte exponentielle Wachstum die Schranke der Gesamtbevölkerungszahl von Deutschland negiert. Hier wäre also besser ein beschränktes Wachstum oder ein logistisches Wachstum vorauszusetzen. Für den Monat März 2020 oder das erste Drittel im April ($0 \le t \le 40$) mag die Annahme exponentiellen Wachstums (noch) gerechtfertigt erscheinen.

c) I. Der Ansatz $g(t) = ce^{kt}$ ist der gleiche wie bei Aufgabe a). Für den 26. März 2020 sind 253 Todesfälle zu verzeichnen, für den 25. März 253–55 = 98. Auf der Kurve der Wachstumsfunktion g(t) liegen die Punkte R(25|198) und S(26|253), so dass gilt:

R(25|198): $g(25) = ce^{k \cdot 25} = 198$ (1)
S(26|253): $g(26) = ce^{k \cdot 26} = 253$ (2).

Division der beiden Gleichungen (1) und (2) ergibt:

(2) : (1) => $\frac{g(26)}{g(25)} = \frac{253}{198} = 1{,}278 = \frac{ce^{26k}}{ce^{25k}} = e^k$ => k = ln(1,278) => k = 0,2453.

Einsetzen von k = 0,2453 z.B. in die Gleichung (1) führt auf:

$ce^{0{,}2453\cdot 25} = 198 \Leftrightarrow 460{,}586c = 198 \Leftrightarrow c = 0{,}43$.

Die Wachstumsfunktion der Todesfälle lautet:

$g(t) = 0{,}43\cdot e^{0{,}2453t}$.

II. Die <u>Sterberate</u> r(t) bestimmt sich als:

$$r(t) = \frac{g(t)}{f(t)} = \frac{0{,}43e^{0{,}2453t}}{200e^{0{,}206t}} = 0{,}00215e^{0{,}0393t}.$$

III. Es sind zwei <u>Mittelwerte</u> der Sterberate auf den Intervallen [0;7] (Anfang bis 7. März 2020) und [31; 38] (1. bis 8. April 2020) zu bestimmen; also gelten gemäß $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b r(t)dt$ für ein Intervall [a; b] und mit Stammfunktion $R(t) = 0{,}00215\cdot\frac{1}{0{,}0393}e^{0{,}0393t} = 0{,}055e^{0{,}0393t}$ die folgenden Berechnungen:

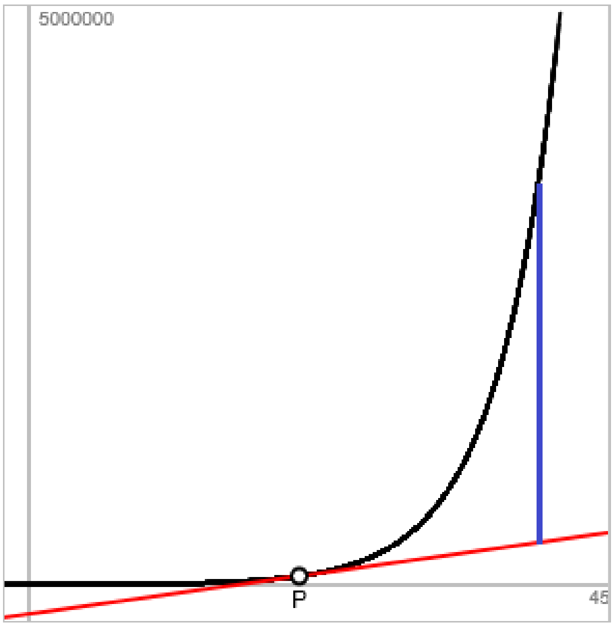
[0; 7]: $m_1 = \frac{1}{7-0}\int_0^7 r(t)dt = \frac{1}{7}[R(t)]_0^7 = \frac{1}{7}(R(7)-R(0)) = \frac{1}{7}(0{,}072-0{,}055) = 0{,}024$

[31; 38]: $m_2 = \frac{1}{38-31}\int_{31}^{38} r(t)dt = \frac{1}{7}[R(t)]_{31}^{38} = \frac{1}{7}(R(38)-R(31)) = \frac{1}{7}(0{,}245-0{,}186) = 0{,}0084$.

Der Wochenmittelwert der Sterberate hat sich also zwischen Anfang März und Anfang April rund verdreieinhalbfacht. Die Wahrscheinlichkeit, an Covid-19 zu sterben, steigt also (von 0,24 % auf 0,84 %), wie auch die monoton steigende Funktion r(t) nahelegt.

d) I. Zu $f(t) = 1000\cdot e^{0{,}206t}$ ist die <u>Tangente</u> an der Stelle $t_0 = 21$ (entspricht 21. März 2020) zu bilden. Es gilt die Tangentenformel: $y = f'(t_0)(t-t_0)+f(t_0) = f'(21)(t-21)+f(21)$ sowie mit $f'(t) = 206\ e^{0{,}206t}$:

f(21) = 75641,1; f'(21) = 15582,1 => Tangente: y = 15582,1t – 251582,4.



II. Wir bilden die <u>Differenz</u> zwischen Funktion f(t) und Tangente y an der Stelle t = 40 (entspricht dem 9. April 2020):

f(40)–y(40) = 3417838,7

D.h.: Bei rund 3,4 Millionen Personen konnte eine Infektion verhindert werden.

e) I. Zur Parameterbestimmung bei der Funktion $h(t) = ae^{-\frac{(t-b)^2}{c}}$ ist zunächst die Achsensymmetrie von h(t) zur Achse t = 6 (als Senkrechte im t-y-Koordinatensystem) bei Krankheitsdauer von einem Jahr bzw. 12 Monaten hervorzuheben. Daher ist: b = 6, und an der Stelle t = 6 liegt das Maximum der Gaußschen Glockenkurve mit h(6) = 80000. Es gilt somit:

h(6) = $ae^{-\frac{(6-6)^2}{c}}$ = ae^0 = a = 80000.

Als Zwischenresultat ergibt sich mit a = 80000 und b = 6: $h(t) = 80000 \cdot e^{-\frac{(t-6)^2}{c}}$. Da h(0) = 200 gilt, folgt schließlich:

h(0) = $80000e^{-\frac{(0-6)^2}{c}} = 80000e^{-\frac{36}{c}}$ = 200 => $e^{-\frac{36}{c}}$ = 0,0025 => $-\frac{36}{c}$ = -6 => -36 = -6c => c = 6.

Die gesuchte Funktionsvorschrift lautet:

$$h(t) = 80000e^{-\frac{(t-6)^2}{6}}.$$

II. Das Maximum von h(t) liegt bei t = 6 mit Hochpunkt H(6|80000). Die Wendepunkte von h(t) ergeben sich mit Hilfe der 1. und 2. Ableitung:

$$h'(t) = 80000 \cdot \left(-\frac{1}{3}(t-6)\right)e^{-\frac{(t-6)^2}{6}} = -\frac{80000}{3}(t-6)e^{-\frac{(t-6)^2}{6}}$$

$$h''(t) = -\frac{80000}{3}e^{-\frac{(t-6)^2}{6}} - \frac{80000}{3}(t-6)\left(-\frac{1}{3}(t-6)\right)e^{-\frac{(t-6)^2}{6}} = -\frac{80000}{3}\left(1-\frac{1}{3}(t-6)^2\right)e^{-\frac{(t-6)^2}{6}}.$$

Mit h‘‘(t) = 0 folgt:

$$-\frac{80000}{3}\left(1-\frac{1}{3}(t-6)^2\right)e^{-\frac{(t-6)^2}{6}} = 0 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{3}(t-6)^2 = 0 \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{3}(t-6)^2 \Leftrightarrow$$

$3 = (t-6)^2 \Leftrightarrow \pm\sqrt{3} = t-6 \Leftrightarrow 6\pm\sqrt{3} = t$.

Nach t = 6–√3 ≈ 4,27 Monaten lässt also die Zunahme der Coronainfektion nach.

III. Kapazitätsengpässe bei der Intensivversorgung in den Krankenhäusern entstehen, wenn

h(t) = 0,65·54000 = 35100

gilt. Wir rechnen:

$80000e^{-\frac{(t-6)^2}{6}}$ = 35100 ⇔ $e^{-\frac{(t-6)^2}{6}}$ = 0,4389 ⇔ $-\frac{(t-6)^2}{6}$ = -0,824 ⇔

$(t-6)^2$ = 4,94 ⇔ t–6 = ±2,22 ⇔ t = 6±2,22.

Zum Zeitpunkt t = 6–2,22 = 3,78, also im Monat Juni 2020, kommt es erstmals zu Engpässen.

IV. [Zusatz:] Das (übrigens nur numerisch bestimmbare) Integral $\int_0^{12} h(t)dt$ = 347144 gibt als Fläche unterhalb der Funktion h(t) die Gesamtanzahl der Schwerstkranken während der Pandemie an, im Durchschnitt also 28929 im Monat.

Teil B: a) Der Abstand der Punkte P und Q ist zu bestimmen vermöge:

d(P,Q) = $\left|\vec{PQ}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\8\\12\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\18\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\8\\-6\end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2+8^2+(-6)^2} = \sqrt{100}$ = 10 LE = 1 m.

Die Distanz zwischen Gesichtern von Kunde und Kassiererin liegt damit unter 1,5 m.

b) I. Wir ergänzen das Dreieck ΔABC zum Parallelogramm ABCD durch den Punkt D mit:

$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC} = \begin{pmatrix}-5\\5\\20\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\5\\20\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\5\\0\end{pmatrix}$ -> D(-5|5|0).

II. Das Dreieck ΔABC ist rechtwinklig mit rechtem Winkel an der Ecke B. Es folgt nämlich aus

$\vec{AB} = \begin{pmatrix}5\\5\\20\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-5\\5\\20\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{AC} = \begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-5\\5\\20\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\0\\-20\end{pmatrix}$, $\vec{BC} = \begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\5\\20\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-20\end{pmatrix}$:

$\left|\vec{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix}10\\0\\0\end{pmatrix}\right| = 10$, $\left|\vec{AC}\right| = \left|\begin{pmatrix}10\\0\\-20\end{pmatrix}\right| = \sqrt{500}$, $\left|\vec{BC}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\0\\-20\end{pmatrix}\right| = 20$

sowie:

$10^2 + 20^2 = \sqrt{500}^2$,

woraus die Gültigkeit des Satzes des Pythagoras folgt und damit die Rechtwinkligkeit des Dreiecks, woraus wiederum die Existenz des Parallelogramms ABCD als Rechteck folgt.

III. Der Flächeninhalt des Rechtecks ABCD ergibt sich aus:

A_{ABCD} = $\left|\vec{AB}\right| \cdot \left|\vec{BC}\right| = 10 \cdot 20$ = 200 FE = 20000 cm^2 = 2 m^2.

IV. Die Ebene, auf der die Punkte A, B, C, D liegen, heißt:
E: x_2 = 5.

c) I. Aus den Punkten P(0|0|18) und Q(0|8|12) folgt mit: $\vec{PQ} = \begin{pmatrix}0\\8\\-6\end{pmatrix}$ (siehe a)) die Geradengleichung:

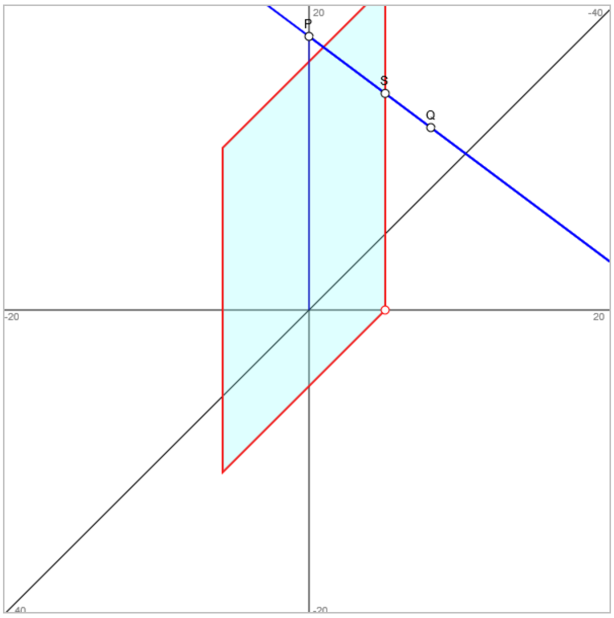
g: $\vec{x} = \vec{OP} + \vec{PQ} = \begin{pmatrix}0\\0\\18\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\8\\-6\end{pmatrix}$.

II. Wir berechnen den Schnittpunkt S zwischen der Geraden g und der Ebene E und erhalten sofort:

g -> x_2 = 8t -> E -> 8t = 5 => t = 0,625,

so dass sich für den Schnittpunkt ergibt:

g -> $\vec{OS} = \begin{pmatrix}0\\0\\18\end{pmatrix} + 0{,}625\begin{pmatrix}0\\8\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\5\\14{,}25\end{pmatrix}$ -> S(0|5|14,25).



d) I. Wir schneiden die Gerade g_a mit der die Plexiglasscheibe begrenzenden Gerade h durch die Ecken B(5|5|20) und C(5|5|0). Die Gerade h bestimmt sich als:

h: $\vec{x} = \vec{OB} + \vec{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 20 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix}$,

der Schnittpunkt, den wir nicht auszurechnen brauchen, durch Gleichsetzen der Parametergleichungen von g_a und h:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} a \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 20 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix} \qquad | -s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix}, -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$r \begin{pmatrix} a \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$ -> lineares Gleichungssystem ->

$$\begin{pmatrix} ra = 5 \\ 8r = 5 \\ -6r + 20s = 2 \end{pmatrix}$$ -> r = 0,625, a = 5/0,625 = 8, s = 0,2875.

Wegen der Symmetrie von Geradenbüschel und Scheibe zur x_2-x_3-Ebene schneiden die Geraden g_a mit -8≤a≤8 die Ebene E.

II. Gemäß der Formel $\cos\varphi = \frac{\left|\vec{u} \cdot \vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right|}$ für den <u>Schnittwinkel</u> φ zwischen zwei Geraden mit Richtungsvektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ muss mit der x_3-Achse als Gerade k: $\vec{x} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} a \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$ der Geraden g_a gelten:

$$\cos 60° = \frac{\left|\begin{pmatrix} a \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} a \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{|-6|}{\sqrt{a^2+100}} \Leftrightarrow \sqrt{a^2+100} = 12 \Leftrightarrow$$

$a^2+100 = 144 \Leftrightarrow a^2 = 44 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{44} \approx \pm 6{,}63$.

e) Wir wenden das Hilfsebenenverfahren zur Bestimmung des Abstands zwischen Punkt Q(0|8|12) und Gerade g_{10}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$ an. Die senkrecht zur Gerade stehende Hilfsebene durch den Punkt Q hat die Form:

E_H: $10x_1 + 8x_2 - 6x_3 = -8$.

Der Lotfußpunkt F ist der Schnittpunkt von Gerade und Hilfsebene:

g_{10} -> $x_1 = 10r$, $x_2 = 8r$, $x_3 = 18-6r$ -> E_H -> $10\cdot 10r + 8\cdot 8r - 6\cdot(18-6r) = -8 \Leftrightarrow$
$164r - 108 + 36r = -8 \Leftrightarrow 200r - 108 = -8 \Leftrightarrow 200r = 100 \Leftrightarrow r = 0{,}5$ ->

$$\vec{OF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix} + 0{,}5\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 15 \end{pmatrix}$$ -> F(5|4|15).

Der gesuchte Abstand zwischen Punkt Q und dem Lotfußpunkt F ist dann:

$$d(Q,F) = \left|\vec{QF}\right| = \left|\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{5^2+(-4)^2+3^2} = \sqrt{50}$$ = 7,07 LE = 70,7 cm.

Teil C: a) I. Die Anzahl der Personen, die in der Vergangenheit oder aktuell infiziert waren bzw. sind, beträgt mit $f(t) = 1000\cdot e^{0,206t}$ bei t = 36 (entspricht dem 5. April 2020):

$f(36) = 1000\cdot e^{0,206\cdot 36}$ = 1662371 Personen,

das sind 1662371/82000000 = 0,02 = 2 % der Gesamtbevölkerung von Deutschland. Es ergibt sich somit der folgende Wahrscheinlichkeitsbaum (Merkmale: Infektion [Ausgänge I, NI], Test [Ausgänge +, -]; zweistufig):

	Infektion	Test	Merkmale			
		0.95 **+**	>	p(**I; +**) =	0.019	**1**
	0.02 **I**					
		0.05 **-**	>	p(**I; -**) =	0.001	**2**
		0.01 **+**	>	p(**NI; +**) =	0.0098	**3**
	0.98 **NI**					
		0.99 **-**	>	p(**NI; -**) =	0.9702	**4**
				Summe:	1	

II. Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten sind:

1) p(+) = p(I; +) + p(NI; +) = 0,019 + 0,0098 = 0,0288 = 2,88 %

2) p(I; +) = 0,019 = 1,9 %
3) p_+(I) = p(I; +)/p(+) = 0,019/0,0288 = 0,66 = 66 % (bedingte Wahrscheinlichkeit)
4) p_I(+) = 0,95 = 95 % (siehe Wahrscheinlichkeitsbaum, bedingte Wahrscheinlichkeit).

b) Es liegt ein Bernoulliexperiment mit p = 0,06 und n = 220 vor; die binomialverteilte Zufallsvariable X ist die Anzahl der Todesfälle. Für die gesuchten Wahrscheinlichkeiten gilt:

1) p(X=6) = 0,0122 = 1,22 %
2) p(X≤10) = 0,2268 = 22,68 %
3) p(X>15) = 1 – p(X≤14) = 0,2492 = 24,92 %
4) p(5≤X≤12) = p(X≤12) – p(X≤4) = 0,4346 = 43,46 %.

c) Mit p = 0,06 und n = 160 und der binomialverteilten Zufallsvariable X als Anzahl der Todesfälle ergibt sich der linksseitige Signifikanztest:

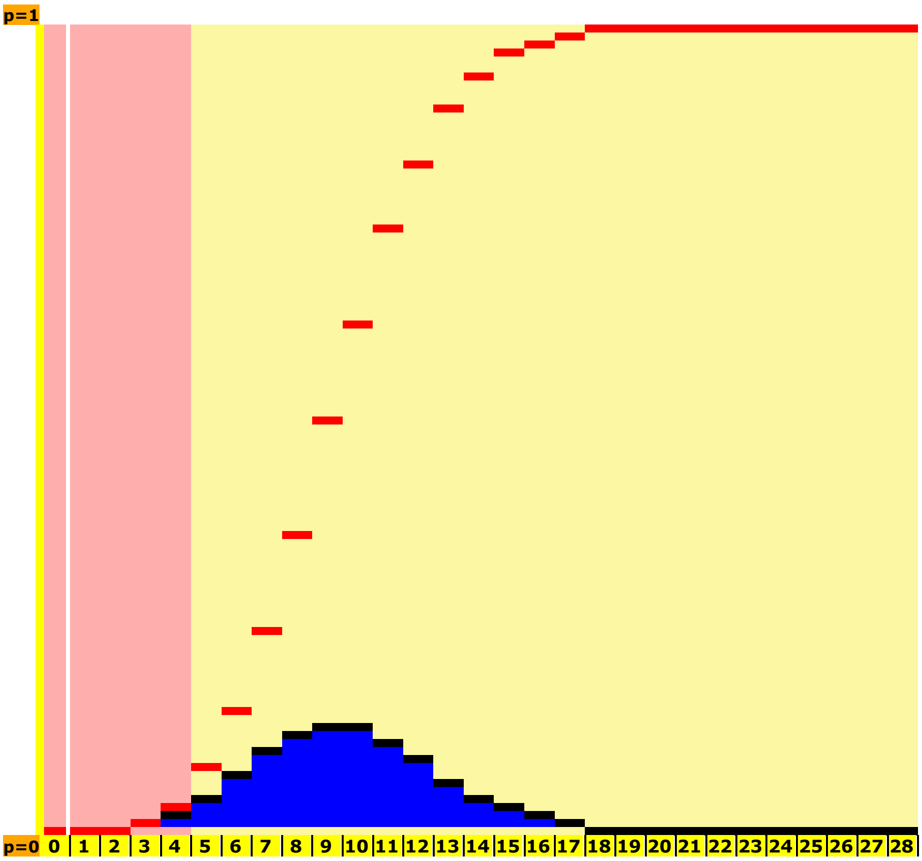
Nullhypothese H_0: p = 0,06
Gegenhypothese H_1: p < 0,06
Signifikanzniveau α = 0,05.

Zu bestimmen ist der Ablehnungsbereich A = [0; g] mit: p(X≤g) ≤ α, d.h.:

p(X≤g) ≤ 0,05 => g = 4 => A = [0; 4]

gemäß:

n = 160	B(160,0.06)	p = 0.06
k =	p(X=k) =	p(x≤k) =
0	0.00005	0.00005
1	0.000512	0.000563
2	0.0026	0.003163
3	0.008741	0.011903
4	0.021898	0.033802
5	0.04361	0.077412
6	0.071911	0.149323
7	0.100981	0.250304
8	0.123272	0.373577
9	0.132889	0.506466
10	0.128083	0.634549
11	0.111484	0.746033
12	0.088357	0.83439
13	0.064207	0.898597
14	0.043032	0.941629
15	0.026735	0.968364
16	0.015465	0.983829
17	0.008362	0.992191
18	0.00424	0.996431
19	0.002023	0.998453
20	0.00091	0.999364
21	0.000387	0.999751
22	0.000156	0.999907
23	0.00006	0.999967
24	0.000022	0.999989
25	0.000008	0.999996
26	0.000003	0.999999
27	0.000001	1
28	0	1
...	0	1
160	0	1



Damit ergibt sich die Entscheidungsregel: Liegt die Anzahl der verstorbenen Patienten im Ablehnungsbereich, so entscheidet man für die Gegenhypothese, also dafür, dass das Chloroquin-Derivat wirksam ist, und begeht, falls doch die Nullhypothese wahr ist, einen Fehler von maximal 5 % (genauer: 3,38 % als Wahrscheinlichkeit des Ablehnungsbereichs).
Die Anzahl der verstorbenen Patienten ist drei. Gemäß der Entscheidungsregel wird damit die Ge-

genhypothese favorisiert.

www.michael-buhlmann.de / 03.2020 / Aufgabe 999