

# Mathematikaufgaben

## > Analysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung

### > Coronapandemie

**Aufgabe:** *Teil A* [Analysis]: Der erstmals Ende 2019 in China aufgetretene Coronavirus verursacht eine grippeähnliche, unter Umständen tödlich verlaufende Erkrankung Covid-19 u.a. einhergehend mit Fieber, Husten und Lungenentzündung oder auch keinen oder geringen Symptomen. Er breitet sich weltweit als Pandemie aus.

Die kumulierte Anzahl der Verstorbenen durch die Coronapandemie kann dargestellt werden mit einer Funktion des logistischen Wachstums vom Typ:

$$f(t) = \frac{aS}{a + (S - a)e^{-kt}} \quad (t \text{ in Monaten ab März 2020, } f(t) \text{ in 1000 Personen}).$$

a) Gegeben ist die logistische Wachstumsfunktion  $f(t) = \frac{80}{0,2 + 399,8e^{-1,25t}}$ , die die Anzahl der bis

zum Monat  $t$  insgesamt in den Vereinigten Staaten von Amerika (USA) am Coronavirus Verstorbenen angibt. Zeichne die Funktion  $f(t)$ . Wie viel Personen waren Anfang März 2020 in den USA am Coronavirus verstorben? Wie viel Personen sterben auf lange Sicht am Coronavirus, wann ist die Pandemie in den USA überwunden? In welchem Monat war der Zuwachs an Verstorbenen am größten? Wie groß ist die Zunahme im Monat September 2020? Charakterisiere den Verlauf der (jeder) logistischen Wachstumsfunktion? Welche Ursachen hat der katastrophale Verlauf der Pandemie in den USA?

b) Die logistische Wachstumsfunktion der kumulierten Anzahl der durch die Coronapandemie in der Bundesrepublik Deutschland (BRD) Verstorbenen gehorcht der folgenden Gesetzmäßigkeit:

$g(t) = \frac{1}{0,1 + 9,9e^{-0,85t}}$ . Gib Opferzahl zu Beginn der Pandemie und die Gesamtopferzahl an. Wie

lassen sich aus den beiden Wachstumsfunktionen  $f(t)$  und  $g(t)$  Unterschiede in Behandlung und Verlauf der Pandemie zwischen USA und BRD feststellen?

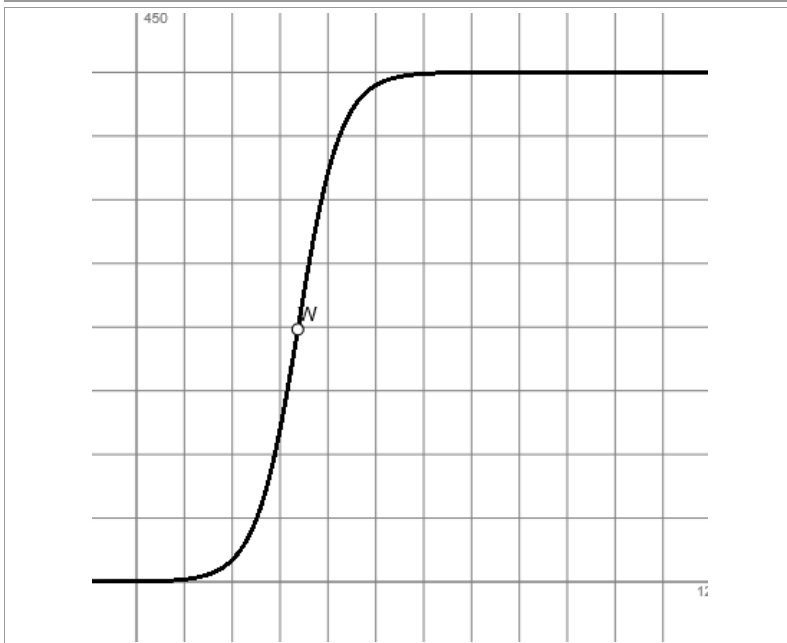
*Teil B* [Wahrscheinlichkeitsrechnung]: Während der Coronapandemie starben in New York (USA) von jeweils 1000 schwer Erkrankten in der 1. Aprilwoche 85, in der 2. Aprilwoche 110. Lässt sich mit Hilfe eines Signifikanztests zum Signifikanzniveau von 5 % entscheiden, ob die Sterberate signifikant gestiegen ist?

**Lösung:** *Teil A:* a) I. Graph und Kurvendiskussion zur Funktion  $f(t) = \frac{80}{0,2 + 399,8e^{-1,25t}}$  führen auf:

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	0.2	0.45	1.01	Schnittpunkt $S_y(0 0.2)$
0.5	0.6154	1.38	3.1	
1	1.8895	4.23	9.43	
1.5	5.7635	12.78	27.93	

2	17.2363	37.11	76.3	
2.5	48.7239	96.28	163.84	
3	119.7394	188.76	170.43	
3.37	198.2098	224.97	0	Wendepunkt W(3.37 198.21)
3.5	227.2885	220.8	-67.78	
4	320.848	142.85	-194.2	
4.5	370.3393	61.79	-118.41	
5	389.8629	22.23	-47.48	
5.5	396.6517	7.47	-16.53	
6	398.9068	2.45	-5.49	
6.5	399.6444	0.8	-1.8	
7	399.8845	0.26	-0.58	
7.5	399.9625	0.08	-0.19	
8	399.9878	0.03	-0.06	
8.5	399.996	0.01	-0.02	
9	399.9987	0	-0.01	
9.5	399.9996	0	0	
10	399.9999	0	0	
10.5	400	0	0	
11	400	0	0	
11.5	400	0	0	
12	400	0	0	

Graph:



II. Die Auswertung der Wachstumsfunktion ergibt nun:

$f(0) = 0,2 = 200$  Verstorbene

$t \rightarrow \infty: f(t) \rightarrow 400 = 400000$  Verstorbene

$f'(9) = 0 \rightarrow$  faktisch keine Zunahme der am Coronavirus Verstorbenen ab Dezember 2020

$f''(t) = 0$  (Wendepunkt)  $\Rightarrow t = 3,37 \rightarrow$  Monat Mai 2020 als Monat mit stärkster Zunahme

$f'(6,5) = 2,45 = 24500$  Verstorbene als Zunahme.

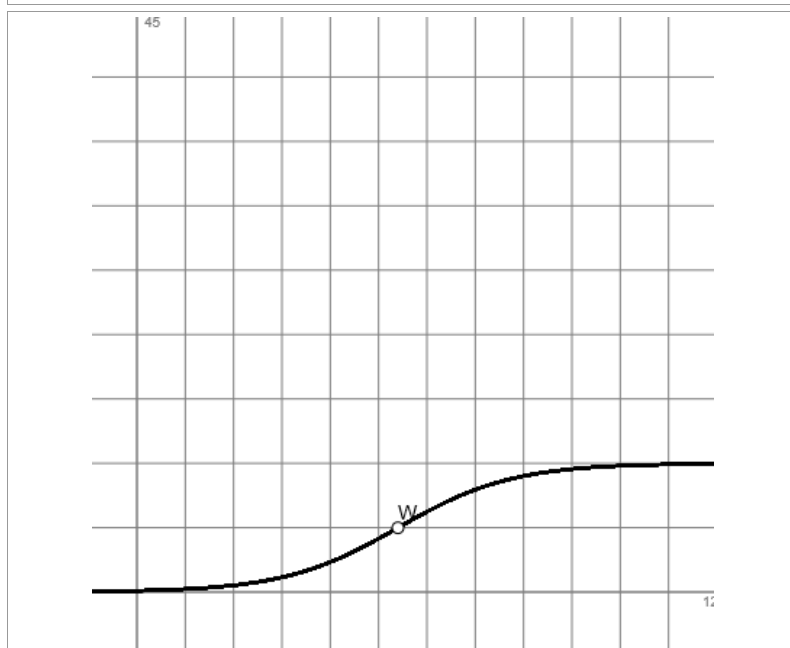
Logistische Wachstumsfunktionen gehorchen zunächst ungefähr einem exponentiellen Wachstumsverlauf (bis etwa zum Wendepunkt), dann einem beschränkten Wachstum (Schranke).

Die Ursachen für den ungünstigen Verlauf der Coronapandemie in den USA sind vielfältig, resultieren aber hauptsächlich aus dem unzulänglichen Sozial- und Gesundheitssystem.

b) I. I. Graph und Kurvendiskussion zur Funktion  $g(t) = \frac{1}{0,1 + 9,9e^{-0,85t}}$  führen auf:

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	0.1	0.08	0.07	Schnittpunkt $S_y(0 0.1)$
0.5	0.1522	0.13	0.1	
1	0.2309	0.19	0.16	
1.5	0.3489	0.29	0.23	
2	0.524	0.42	0.32	
2.5	0.7798	0.61	0.44	
3	1.1455	0.86	0.56	
3.5	1.6519	1.17	0.67	
4	2.3234	1.52	0.69	
4.5	3.1645	1.84	0.57	
5	4.1457	2.06	0.3	
5.4	4.9872	2.12	0	Wendepunkt $W(5.4 4.99)$
5.5	5.1996	2.12	-0.07	
6	6.2361	2	-0.42	
6.5	7.1705	1.72	-0.64	
7	7.9493	1.39	-0.69	
7.5	8.5568	1.05	-0.63	
8	9.0069	0.76	-0.52	
8.5	9.3276	0.53	-0.39	
9	9.5499	0.37	-0.28	
9.5	9.7011	0.25	-0.2	
10	9.8025	0.16	-0.13	
10.5	9.87	0.11	-0.09	
11	9.9146	0.07	-0.06	
11.5	9.944	0.05	-0.04	
12	9.9633	0.03	-0.03	

Graph:



II. Es gilt:

$g(0) = 0, 1 = 100$  Verstorbene  
 $t \rightarrow \infty: g(t) \rightarrow 10 = 10000$  Verstorbene.

Bezogen auf die Gesamtbevölkerungszahl von USA und BRD nahm die Coronapandemie in der BRD einen günstigeren Verlauf, ablesbar an der Schranke  $S = 10$  (BRD) gegenüber  $S = 400$  (USA) und am Proportionalitätsfaktor  $k = 0,85$  (BRD) und  $k = 2,25$  (USA). Ein kleinerer Proportionalitätsfaktor  $k$  bewirkt eine größere Streckung der Wachstumsfunktion in  $t$ -Richtung, d.h.: die Coronapandemie verhält sich von ihren Auswirkungen her zeitlich gestreckt, so dass z.B. eine bessere Behandlung der Infizierten im Gesundheitssystem gewährleistet ist. Dies wirkt sich wieder auf die Schranke  $S$  aus.

*Teil B:* Wir gehen von der 1. Aprilwoche aus und haben bei einer Gesamtanzahl von  $n = 1000$  die Sterberate  $p = 85/1000 = 0,085$  als Grundwahrscheinlichkeit mit der Zufallsvariable  $X$  des Bernoulli-Experiments als Anzahl der Verstorbenen. Wir stellen daher den rechtsseitigen Signifikanztest wie folgt auf:

Nullhypothese  $H_0: p = 0,085$   
 Gegenhypothese  $H_1: p > 0,085$   
 Signifikanzniveau  $\alpha = 0,05$ .

Zu bestimmen ist der Ablehnungsbereich  $A = [g; 1000]$  mit:  $p(X \geq g) \leq \alpha$ , d.h.:

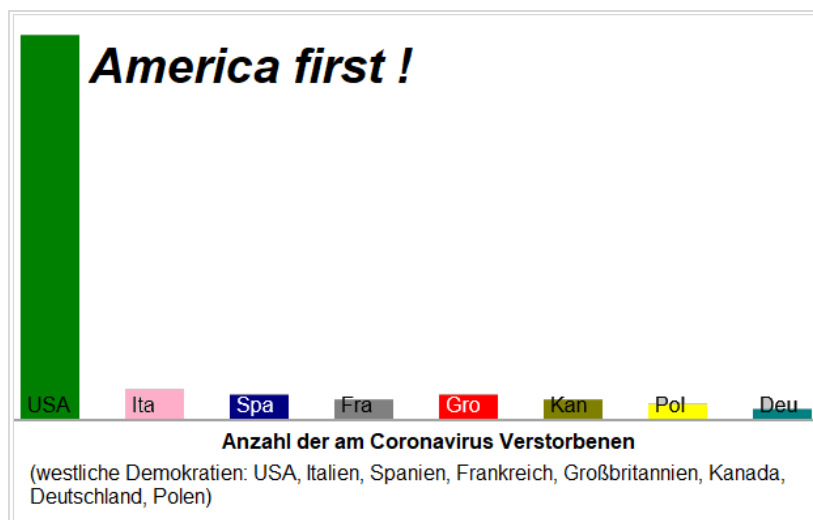
$$\begin{array}{ll}
 p(X \geq g) \leq 0,05 & \text{(Gegenwahrscheinlichkeit)} \\
 1 - p(X \leq g-1) \leq 0,05 & | -1 \\
 -p(X \leq g-1) \leq -0,95 & | \cdot (-1) \\
 p(X \leq g-1) \geq 0,95 &
 \end{array}$$

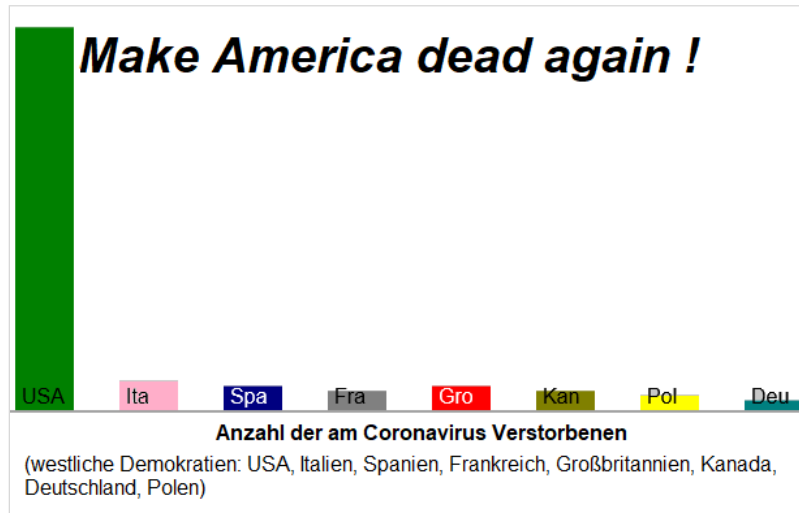
Wir werten den Term  $p(X \leq g-1)$  tabellarisch aus und erhalten:

$n = 1000$	$B(1000, 0.085)$	$p = 0.085$
$g-1 =$	$p(X=g-1) =$	$p(x \leq g-1) =$
100	0.010618	0.957981
101	0.008789	0.966771

Für  $g-1 = 100$  mit  $p(X \leq g-1) \geq 0,95$  erhalten wir:  $g = 101$ . Der Ablehnungsbereich lautet damit:  $A = [101; 1000]$ . Da nun in der 2. Aprilwoche die Zahl der Toten auf 110 mit  $110 \in [101; 1000]$  gestiegen ist, so lehnen wir die Nullhypothese zu Gunsten der Gegengypothese einer signifikanten Erhöhung der Sterberate ab und begehen im Fall, dass die Nullhypothese dennoch stimmt, einen Fehler von maximal 5 % bzw. einen Fehler in Höhe der Irrtumswahrscheinlichkeit als Wahrscheinlichkeit des Ablehnungsbereichs  $1 - 0,9668 = 0,0332 = 3,32 \%$ .

Zum Abschluss noch zwei Anmerkungen betreffend die US-amerikanische Politik in Bezug auf die Coronapandemie – oder um die Polit-Slogans des US-Präsidenten Donald Trump zu verwenden:





Nationalistische, unsäglich-hohle Äußerungen von Populisten lassen sich nun einmal einfach gut karikieren und ironisieren, was hiermit im Rahmen der Möglichkeit der freien Meinungsäußerung in westlichen Demokratien geschehen ist.

[www.michael-buhlmann.de](http://www.michael-buhlmann.de) / 04.2020 / Aufgabe 1007