

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Integration

Aufgabe: Bestimme zur Funktion $f(x)$ mit:

$$f(x) = \frac{x^3+2}{x^2}.$$

eine Stammfunktion $F(x)$.

Lösung: I. Wir benutzen für das Aufleiten des Funktionsterms die folgenden Integrationsregeln:

$$\int (u(x) + v(x))dx = \int u(x)dx + \int v(x)dx \quad (\text{Summenregel})$$

$$\int (ku(x))dx = k \int u(x)dx \quad (\text{multiplikative Konstante})$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \quad (\text{Potenzregel, } n \neq -1).$$

II. Wir formen zunächst den Funktionsterm um in eine Summe von Potenzen:

$$f(x) = \frac{x^3+2}{x^2} = \frac{x^3}{x^2} + \frac{2}{x^2} = x + \frac{2}{x^2} = x + 2x^{-2},$$

was durch Anwendung von Bruch- und Potenzgesetzen möglich ist, wenn z.B. der Nenner im Bruch des ursprünglichen Funktionsterms eine Potenz von x ist. Nun leiten wir die Funktion

$f(x) = x + 2x^{-2}$ auf, indem wir Summen-, Faktor- und Potenzregel verwenden, d.h. es ergibt sich als Stammfunktion $F(x)$:

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2 \cdot \frac{1}{-1}x^{-1} = \frac{1}{2}x^2 - 2x^{-1},$$

also:

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{x}.$$