Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Integration

Aufgabe: Bestimme zur Funktion f(x) mit:

$$f(x) = \frac{3x^3+4x^2-12}{2x^3}.$$

eine Stammfunktion F(x).

Lösung: I. Wir benutzen für das Aufleiten des Funktionsterms die folgenden Integrationsregeln:

$$\int (u(x)+v(x))dx = \int u(x)dx + \int v(x)dx \text{ (Summenregel)}$$

$$\int (ku(x))dx = k\int u(x)dx \text{ (multiplikative Konstante)}$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \text{ (Potenzregel, n≠-1)}$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| \text{ (Potenzregel).}$$

II. Wir formen zunächst den Funktionsterm um in eine Summe von Potenzen:

$$f(x) = \frac{3x^3+4x^2-12}{2x^3} = \frac{3x^3}{2x^3} + \frac{4x^2}{2x^3} - \frac{12}{2x^3} = \frac{3}{2} + \frac{2}{x} - \frac{6}{x^3} = \frac{3}{2} + 2x^{-1} - 6x^{-3},$$

was durch Anwendung von Bruch-und Potenzgesetzen möglich ist, wenn z.B. der Nenner im Bruch des ursprünglichen Funktionsterms eine Potenz von x ist. Nun leiten wir die Funktion $f(x) = \frac{3}{2} + 2x^{-1} - 6x^{-3}$ auf, indem wir Summen-, Faktor- und Potenzregel verwenden, d.h. es ergibt sich – unter Beachtung der Integration von Potenzen mit Exponenten -1 – als Stammfunktion F(x):

$$F(x) = \frac{3}{2}x + 2\ln|x| - 6\cdot\frac{1}{-2}x^{-2} = \frac{3}{2}x + 2\ln|x| + 3x^{-2},$$

also:

$$F(x) = \frac{3}{2}x + 2\ln|x| + \frac{3}{x^2}.$$

www.michael-buhlmann.de / 04.2020 / Aufgabe 1013