

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Integration

Aufgabe: Bestimme zur Funktion $f(x)$ mit:

$$f(x) = 2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{2}.$$

eine Stammfunktion $F(x)$, deren Kurve im x - y -Koordinatensystem durch den Punkt $P(0|-1)$ läuft.

Lösung: I. Wir benutzen für das Aufleiten des Funktionsterms die folgenden Integrationsregeln:

$$\int (u(x) + v(x)) dx = \int u(x) dx + \int v(x) dx \quad (\text{Summenregel})$$

$$\int (ku(x)) dx = k \int u(x) dx \quad (\text{multiplikative Konstante})$$

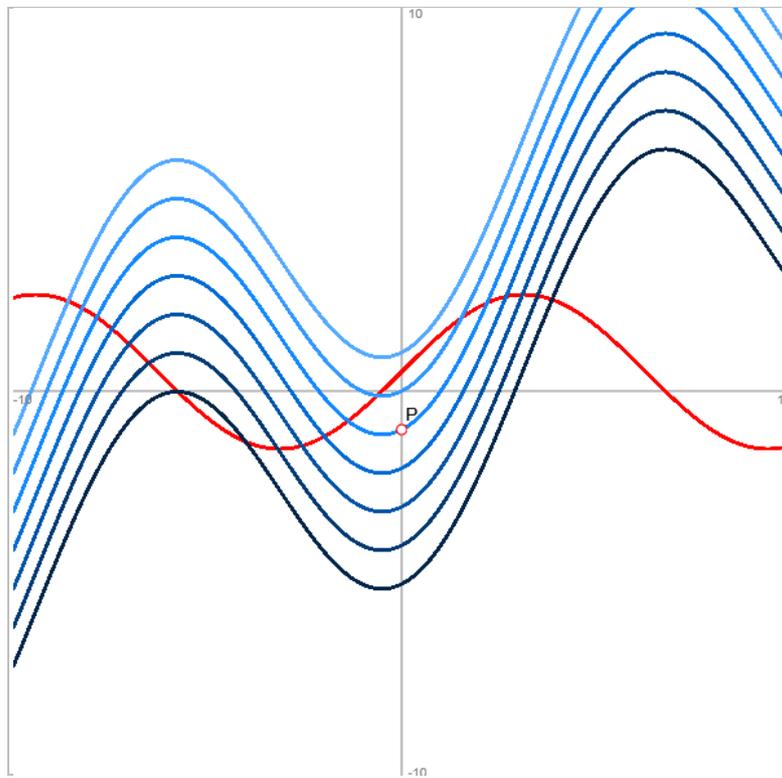
$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \quad (\text{Potenzregel, } n \neq -1)$$

$$\int \sin(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) \quad (\text{Sinusfunktion})$$

$$\int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) \quad (\text{Kosinusfunktion}).$$

II. Wir leiten die Funktion $f(x) = 2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{2}$ auf, indem wir Summen-, Faktor-, Potenzregel und die Regel für Sinusfunktionen (mit Berücksichtigung der inneren Ableitung) verwenden, d.h. es ergibt sich – unter Beachtung der Integrationskonstante C – als (Menge von) Stammfunktion(en) $F(x)$:

$$F(x) = 2 \left(-\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\right) \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x + C = -4\cos\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{2}x + C.$$



Funktion $f(x)$, Stammfunktionen $F(x)$ ($C=-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$), Punkt P

III. Zur Bestimmung der Integrationskonstanten C ist der $P(0|-1)$ in die allgemeine Funktionsgleichung der Stammfunktionen einzusetzen. Es gilt damit:

$$P(0|-1): F(0) = -4\cos\left(\frac{1}{2} \cdot 0\right) + \frac{1}{2} \cdot 0 + C = -4 + 0 + C = -4 + C = -1,$$

woraus folgt:

$$C = 3.$$

Die gesuchte Stammfunktion $F(x)$, deren Kurve im x - y -Koordinatensystem durch den Punkt $P(0|-1)$ verläuft, lautet damit:

$$F(x) = -4\cos\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{2}x + 3.$$