

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Integration

Aufgabe: Bestimme zur Funktion $f(x)$ mit:

$$f(x) = \frac{4}{x^2} + \frac{x}{2}.$$

eine Stammfunktion $F(x)$, deren Kurve die Nullstelle $N(4|0)$ besitzt.

Lösung: I. Wir benutzen für das Aufleiten des Funktionsterms die folgenden Integrationsregeln:

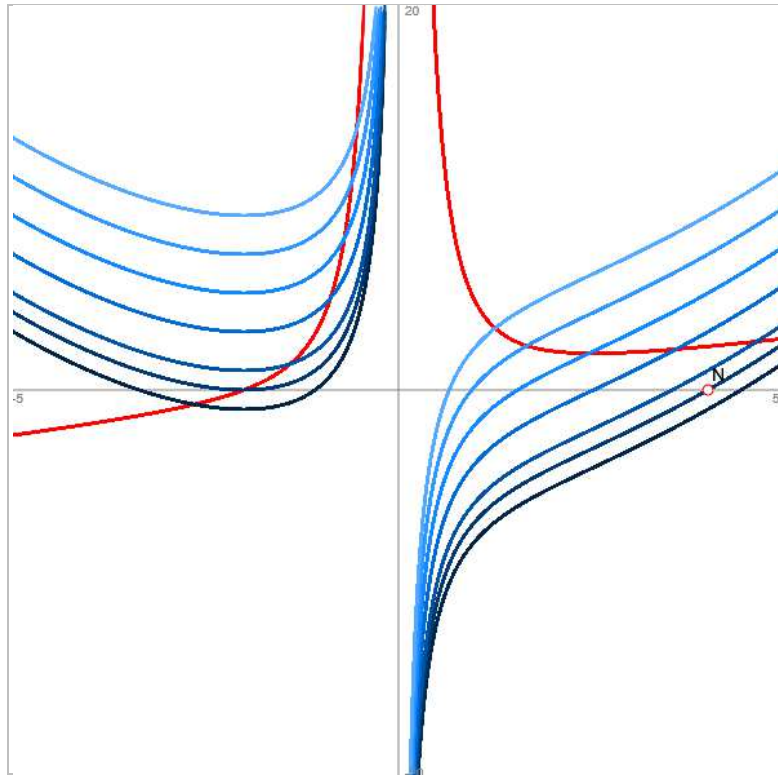
$$\int (u(x) + v(x)) dx = \int u(x) dx + \int v(x) dx \quad (\text{Summenregel})$$

$$\int (ku(x)) dx = k \int u(x) dx \quad (\text{multiplikative Konstante})$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \quad (\text{Potenzregel, } n \neq -1).$$

II. Wir leiten die Funktion $f(x) = \frac{4}{x^2} + \frac{x}{2} = 4x^{-2} + \frac{1}{2}x$ auf, indem wir Summen-, Faktor- und Potenzregel verwenden, d.h. es ergibt sich – unter Beachtung der Integrationskonstante C – als (Menge von) Stammfunktion(en) $F(x)$:

$$F(x) = 4 \cdot \frac{1}{-1} x^{-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} x^2 + C = -4x^{-1} + \frac{1}{4} x^2 + C = -\frac{4}{x} + \frac{1}{4} x^2 + C.$$



Funktion $f(x)$, Stammfunktionen $F(x)$ ($C=-4; -3; -2; 0; 2; 4; 6$), Punkt N

III. Zur Bestimmung der Integrationskonstanten C ist die Nullstelle $N(4|0)$ in die allgemeine Funktionsgleichung der Stammfunktionen einzusetzen. Es gilt damit:

$$N(4|0): F(0) = -\frac{4}{4} + \frac{1}{4} \cdot 4^2 + C = -1 + 4 + C = 3 + C = 0,$$

woraus folgt:

$$C = -3.$$

Die gesuchte Stammfunktion $F(x)$, deren Kurve im x - y -Koordinatensystem durch den Punkt $N(4|0)$ verläuft, lautet damit:

$$F(x) = -\frac{4}{x} + \frac{1}{4}x^2 - 3.$$