Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Funktionen
> Berührpunkte

Aufgabe: Bestimme eventuelle Berührpunkte zwischen den ganz rationalen Funktionen:

$$f(x) = x(x^2 - 8)$$
$$g(x) = 2(x^2 - 4x).$$

Lösung: I. a) Allgemein gilt, dass zur Schnittpunktberechnung zwischen zwei Funktionen f(x) und g(x) die Gleichung:

$$f(x) = g(x) \quad (*)$$

nach x aufzulösen ist. Die Lösungen x_1, x_2, … der Gleichung (*) sind die Schnittstellen der Funktionen; die Schnittpunkte ergeben sich aus aus dem Einsetzen der x_1, x_2, … in die Funktionsgleichungen f(x) oder g(x), so dass $S_1(x_1|f(x_1)) = (x_1|g(x_1))$, $S_2(x_2|f(x_2)) = (x_2|g(x_2))$, …

b) Ein Schnittpunkt $S(x_0|f(x_0)) = (x_0|g(x_0))$ ist ein Berührpunkt, wenn neben der Bedingung:

$$f(x_0) = g(x_0)$$

zusätzlich die Beziehung:

$$f'(x_0) = g'(x_0)$$

erfüllt ist mit den 1. Ableitungen f'(x) und g'(x) der Funktionen f(x) und g(x).

II. Wir lösen die Gleichung $f(x) = g(x)$ nach x wie folgt auf:

f(x) = g(x)

$x(x^2 - 8) = 2(x^2 - 4x)$	(Klammern auflösen)
$x^3 - 8x = 2x^2 - 8x$	| +8x
$x^3 = 2x^2$	| $-2x^2$
$x^3 - 2x^2 = 0$	(Ausklammern)
$x^2(x-2) = 0$	(Satz vom Nullprodukt)
$x^2 = 0$, $x-2 = 0$	

Die zwei einfachen Gleichungen sind:

$x^2 = 0$	| √
$x = 0$	

und:

$x-2 = 0$	| +2
$x = 2$,	

so dass sich als Schnittstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ ergeben.

III. Die Schnittpunkte erhalten wir durch Einsetzen der Schnittstellen z.B. in die Funktion $f(x) = x(x^2 - 8)$. Also:

$x_1 = 0$ => f(0) = 0 => $S_1(0|0)$
$x_2 = 2$ => $f(2) = 2\cdot(2^2-8) = 2\cdot(4-8) = 2\cdot(-4) = -8$ => $S_2(2|-8)$.

Die gesuchten Schnittpunkte sind damit: $S_1(0|0)$, $S_2(2|-8)$ (siehe auch die Abbildung).

IV. Berührpunkte können nur Schnittpunkte der beiden Funktionen f(x) und g(x) sein. Insofern untersuchen wir diesbezüglich die errechneten Schnittpunkte $S_1(0|0)$, $S_2(2|-8)$. Die 1. Ableitungen der

Funktionen $f(x)=x(x^2-8)=x^3-8x$ und $g(x)=2(x^2-4x)=2x^2-8x$ sind dabei u.a. nach Potenz- und Summenregel für das Ableiten:

$$f'(x)=3x^2-8$$
$$g'(x)=4x-8.$$

a) Wir wenden uns dem ersten Schnittpunkt $S_1(0|0)$ zu und erhalten durch Einsetzen von $x_1=0$ in die beiden Ableitungen:

$$f'(0)=-8$$
$$g'(0)=-8,$$

so dass wegen $f'(0)=g'(0)$ in der Tat der Schnittpunkt $S_1(0|0)$ ein Berührpunkt ist.

b) Für den zweiten Schnittpunkt der Funktionen f(x) und g(x), für $S_2(2|-8)$ gilt indes:

$$f'(2)=3\cdot 2^2-8=12-8=4$$
$$g'(2)=4\cdot 2-8=8-8=0.$$

Hier liegt wegen $f'(2)\neq g'(2)$ kein Berührpunkt der Funktionen vor (siehe auch die Abbildung).

www.michael-buhlmann.de / 11.2016 / Aufgabe 284