

# Mathematikaufgaben

## > Funktionen

## > Berührungspunkte

---

**Aufgabe:** Bestimme eventuelle Berührungspunkte zwischen den ganz rationalen Funktionen:

$$f(x) = x(x^2 - 8)$$
$$g(x) = 2(x^2 - 4x).$$

**Lösung:** I. a) Allgemein gilt, dass zur Schnittpunktberechnung zwischen zwei Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  die Gleichung:

$$f(x) = g(x) \quad (*)$$

nach  $x$  aufzulösen ist. Die Lösungen  $x_1, x_2, \dots$  der Gleichung  $(*)$  sind die Schnittstellen der Funktionen; die Schnittpunkte ergeben sich aus dem Einsetzen der  $x_1, x_2, \dots$  in die Funktionsgleichungen  $f(x)$  oder  $g(x)$ , so dass  $S_1(x_1|f(x_1)) = (x_1|g(x_1))$ ,  $S_2(x_2|f(x_2)) = (x_2|g(x_2))$ , ...

b) Ein Schnittpunkt  $S(x_0|f(x_0)) = (x_0|g(x_0))$  ist ein Berührungspunkt, wenn neben der Bedingung:

$$f(x_0) = g(x_0)$$

zusätzlich die Beziehung:

$$f'(x_0) = g'(x_0)$$

erfüllt ist mit den 1. Ableitungen  $f'(x)$  und  $g'(x)$  der Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$ .

II. Wir lösen die Gleichung  $f(x) = g(x)$  nach  $x$  wie folgt auf:

$$f(x) = g(x)$$
$$x(x^2 - 8) = 2(x^2 - 4x) \quad \text{(Klammern auflösen)}$$
$$x^3 - 8x = 2x^2 - 8x \quad \quad \quad | +8x$$
$$x^3 = 2x^2 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad | -2x^2$$
$$x^3 - 2x^2 = 0 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{(Ausklammern)}$$
$$x^2(x-2) = 0 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{(Satz vom Nullprodukt)}$$
$$x^2 = 0, x-2 = 0$$

Die zwei einfachen Gleichungen sind:

$$x^2 = 0 \quad \quad \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x = 0$$

und:

$$x-2 = 0 \quad \quad \quad | +2$$

$$x = 2,$$

so dass sich als Schnittstellen  $x_1 = 0$  und  $x_2 = 2$  ergeben.

III. Die Schnittpunkte erhalten wir durch Einsetzen der Schnittstellen z.B. in die Funktion

$$f(x) = x(x^2 - 8). \text{ Also:}$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow S_1(0|0)$$

$$x_2 = 2 \Rightarrow f(2) = 2 \cdot (2^2 - 8) = 2 \cdot (4 - 8) = 2 \cdot (-4) = -8 \Rightarrow S_2(2|-8).$$

Die gesuchten Schnittpunkte sind damit:  $S_1(0|0)$ ,  $S_2(2|-8)$  (siehe auch die Abbildung).

IV. Berührungspunkte können nur Schnittpunkte der beiden Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  sein. Insofern untersuchen wir diesbezüglich die errechneten Schnittpunkte  $S_1(0|0)$ ,  $S_2(2|-8)$ . Die 1. Ableitungen der

Funktionen  $f(x) = x(x^2 - 8) = x^3 - 8x$  und  $g(x) = 2(x^2 - 4x) = 2x^2 - 8x$  sind dabei u.a. nach Potenz- und Summenregel für das Ableiten:

$$f'(x) = 3x^2 - 8$$

$$g'(x) = 4x - 8.$$

a) Wir wenden uns dem ersten Schnittpunkt  $S_1(0|0)$  zu und erhalten durch Einsetzen von  $x_1=0$  in die beiden Ableitungen:

$$f'(0) = -8$$

$$g'(0) = -8,$$

so dass wegen  $f'(0) = g'(0)$  in der Tat der Schnittpunkt  $S_1(0|0)$  ein Berührungspunkt ist.

b) Für den zweiten Schnittpunkt der Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$ , für  $S_2(2|-8)$  gilt indes:

$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 8 = 12 - 8 = 4$$

$$g'(2) = 4 \cdot 2 - 8 = 8 - 8 = 0.$$

Hier liegt wegen  $f'(2) \neq g'(2)$  kein Berührungspunkt der Funktionen vor (siehe auch die Abbildung).

