**Michael Buhlmann**

# Mathematikaufgaben
## > Funktionen
## > Schnitt-, Berührpunkte

---

**Aufgabe**: Bestimme eventuelle Berührpunkte zwischen den ganz rationalen Funktionen:

$$f(x) = x(x^2 - 8)$$
$$g(x) = 2(x^2 - 4x)\,.$$

**Lösung**: I. a) Allgemein gilt, dass zur Schnittpunktberechnung zwischen zwei Funktionen die Gleichung:

$$f(x) = g(x) \quad (*)$$

nach x aufzulösen ist. Die Lösungen $x_1$, $x_2$, … der Gleichung (*) sind die Schnittstellen der Funktionen; die Schnittpunkte ergeben sich aus aus dem Einsetzen der $x_1$, $x_2$, … in die Funktionsgleichungen f(x) oder g(x), so dass $S_1(x_1|f(x_1)) = (x_1|f(x_1))$, $S_2(x_2|f(x_2)) = (x_2|f(x_2))$, …

b) Ein Schnittpunkt $S(x_0|f(x_0)) = (x_0|f(x_0))$ ist ein Berührpunkt, wenn neben der Bedingung

$$f(x_0) = g(x_0)$$

zusätzlich die Beziehung

$$f'(x_0) = g'(x_0)$$

erfüllt ist mit den 1. Ableitungen f'(x) und g'(x) der Funktionen f(x) und g(x).

II. Wir lösen die Gleichung $f(x) = g(x)$ nach x wie folgt auf:

f(x) = g(x)

$x(x^2 - 8) = 2(x^2 - 4x)$ (Klammern auflösen)

$x^3 - 8x = 2x^2 - 8x$ | +8x

$x^3 = 2x^2$ | $-2x^2$

$x^3 - 2x^2 = 0$ (Ausklammern)

$x^2(x-2) = 0$ (Satz vom Nullprodukt)

$x^2 = 0$, $x-2=0$

Die zwei einfachen Gleichungen sind:

$x^2 = 0$ | √

x = 0

und:

$x-2=0$ | +2

x = 2,

so dass sich als Schnittstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ ergeben.

III. Die Schnittpunkte erhalten wir durch Einsetzen der Schnittstellen z.B. in die Funktion $f(x) = x(x^2 - 8)$. Also:

$x_1 = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow S_1(0|0)$

$x_2 = 2 \Rightarrow f(2) = 2\cdot(2^2-8) = 2\cdot(4-8) = 2\cdot(-4) = -8 \Rightarrow S_2(2|-8)$.

Die gesuchten Schnittpunkte sind damit: $S_1(0|0)$, $S_2(2|-8)$ (siehe auch die Abbildung).

IV. Berührpunkte können nur Schnittpunkte der beiden Funktionen f(x) und g(x) sein. Insofern untersuchen wir diesbezüglich die errechneten Schnittpunkte $S_1(0|0)$, $S_2(2|-8)$. Die 1. Ableitungen der

Funktionen $f(x) = x(x^2 - 8) = x^3 - 8x$ und $g(x) = 2(x^2 - 4x) = 2x^2 - 8x$ sind u.a. nach Potenz- und Summenregel für das Ableiten:

$$f'(x) = 3x^2 - 8$$
$$g'(x) = 4x - 8.$$

a) Wir wenden uns dem ersten Schnittpunkt $S_1(0|0)$ zu und erhalten durch Einsetzen von $x_1=0$ in die beiden Ableitungen:

$$f'(0) = -8$$
$$g'(0) = -8,$$

so dass wegen $f'(0) = g'(0)$ in der Tat der Schnittpunkt $S_1(0|0)$ ein Berührpunkt ist.

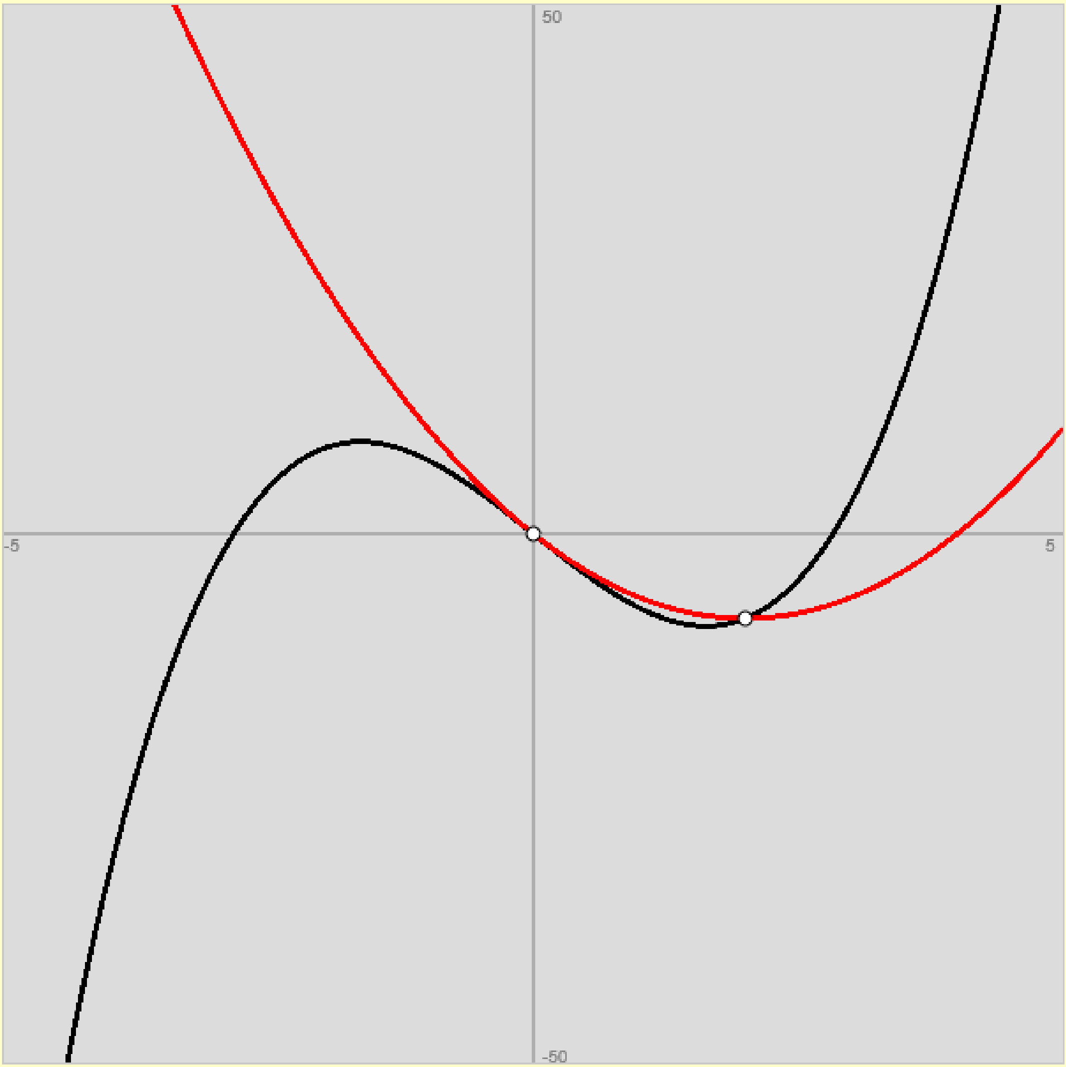
b) Für den zweiten Schnittpunkt der Funktionen f(x) und g(x), für $S_2(2|-8)$ gilt indes:

$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 8 = 12 - 8 = 4$$
$$g'(2) = 4 \cdot 2 - 8 = 8 - 8 = 0.$$

Hier liegt wegen $f'(2) \neq g'(2)$ kein Berührpunkt der Funktionen vor (siehe auch die Abbildung).

**Wertetabelle:**

| x | f(x)=g(x) | Schnittpunkte |
|---|---|---|
| 0 | 0 | (1) Berührpunkt S(0\|0), Schnittwinkel = 0° |
| 2 | -8 | (2) Schnittpunkt S(2\|-8), Schnittwinkel = 75.96° |




**Funktion: f(x) =** x*(x^2-8)
**Funktion: g(x) =** 2*(x^2-4*x)

www.michael-buhlmann.de / 11.2016 / Aufgabe 284