

Mathematikaufgaben

> Funktionen

> Berührungspunkte

Aufgabe: Zeige, dass die Gerade:

$$y = 3(x+1)$$

Tangente an die Funktion

$$f(x) = e^{2x+1} + x + 1.$$

ist. Bestimme den Berührungspunkt.

Lösung: I. a) Allgemein gilt, dass zur Schnittpunktberechnung zwischen zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ die Gleichung:

$$f(x) = g(x) \quad (*)$$

nach x aufzulösen ist. Die Lösungen x_1, x_2, \dots der Gleichung $(*)$ sind die Schnittstellen der Funktionen; die Schnittpunkte ergeben sich aus dem Einsetzen der x_1, x_2, \dots in die Funktionsgleichungen $f(x)$ oder $g(x)$, so dass $S_1(x_1|f(x_1)) = (x_1|g(x_1))$, $S_2(x_2|f(x_2)) = (x_2|g(x_2))$, ...

b) Ein Schnittpunkt $S(x_0|f(x_0)) = (x_0|g(x_0))$ ist ein Berührungspunkt, wenn neben der Bedingung:

$$f(x_0) = g(x_0)$$

zusätzlich die Beziehung:

$$f'(x_0) = g'(x_0)$$

erfüllt ist mit den 1. Ableitungen $f'(x)$ und $g'(x)$ der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$.

II. Es sei $y = 3(x+1) = g(x)$. Da wir die Gleichung $f(x) = g(x)$ algebraisch nicht nach x auflösen können, versuchen wir es über die Identität der 1. Ableitungen, die Gleichung $f'(x) = g'(x)$ mit:

$$g(x) = y = 3(x+1) \Rightarrow g'(x) = y' = 3$$

$$f(x) = e^{2x+1} + x + 1 \Rightarrow f'(x) = e^{2x+1} \cdot 2 + 1 + 0 = 2e^{2x+1} + 1$$

(nach den Ableitungsregeln für Exponential- und Potenzfunktionen sowie nach der Summenregel). Wir lösen die Gleichung $f'(x) = g'(x)$ vermittelst der Umformungen:

$$f'(x) = g'(x)$$

$$2e^{2x+1} + 1 = 3 \quad | -1$$

$$2e^{2x+1} = 2 \quad | :2$$

$$e^{2x+1} = 1 \quad | \ln()$$

$$2x+1 = 0 \quad | -1$$

$$2x = -1 \quad | :2$$

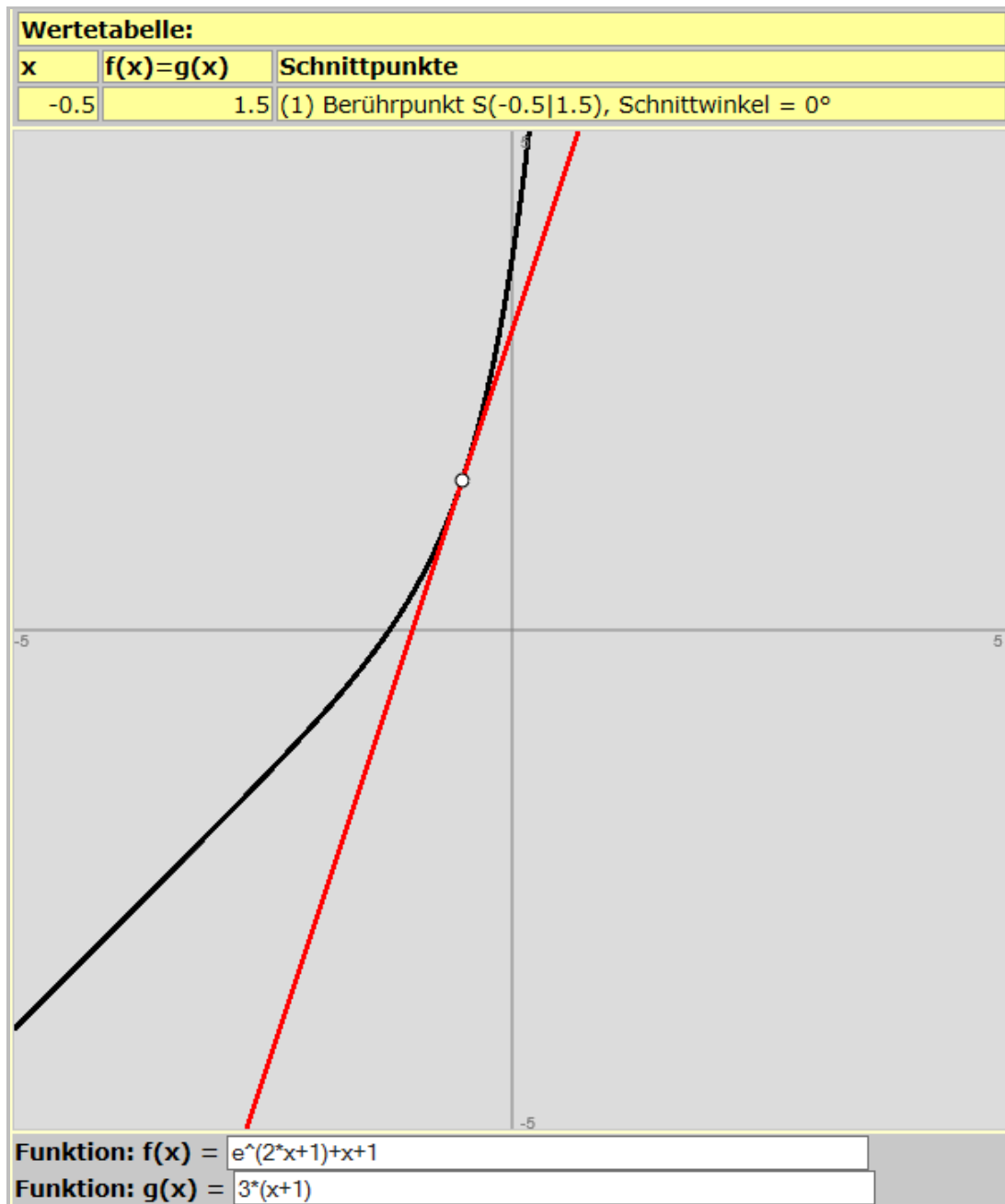
$$x = -0,5$$

An der Stelle $x_0 = -0,5$ könnte ein Berührungspunkt vorliegen, wenn dort ein Schnittpunkt vorhanden ist, d.h. wenn $f(x_0) = g(x_0)$ gilt. Nun ist:

$$y = g(x) = 3(x+1) \Rightarrow g(-0,5) = 3(-0,5+1) = 3 \cdot 0,5 = 1,5$$

$$f(x) = e^{2x+1} + x + 1 \Rightarrow f(-0,5) = e^{2(-0,5)+1} + (-0,5) + 1 = e^0 - 0,5 + 1 = 1,5,$$

d.h. die beiden Funktionswerte $f(-0,5) = g(-0,5)$ stimmen überein. Der Punkt $B(-0,5|1,5)$ ist also in der Tat der Berührungspunkt von Gerade y und Funktion $f(x)$, die Gerade y ist mithin Tangente an die Funktion $f(x)$ im Berührungspunkt (siehe auch die Abbildung).



III. Wir machen noch die Probe, indem wir die Tangentengleichung zu $f(x) = e^{2x+1} + x + 1$ an der Stelle $x_0 = -0,5$ gemäß der Tangentenformel:

$$t: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0),$$

also gemäß:

$$t: y = f'(-0,5)(x - (-0,5)) + f(-0,5) = f'(-0,5)(x + 0,5) + f(-0,5),$$

bestimmen. Wie eben gesehen, ist $f(-0,5) = 1,5$; wegen der Ableitung $f'(x) = 2e^{2x+1} + 1$ gilt zudem: $f'(-0,5) = 3$. Einsetzen von $f(-0,5)$ und $f'(-0,5)$ in die Tangentengleichung führt auf:

$$t: y = 3(x + 0,5) + 1,5 = 3x + 1,5 + 1,5 = 3x + 3 = 3(x + 1)$$

und damit auf die gewünschte Gerade der Aufgabenstellung.