Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Funktionen
> Berührpunkte

Aufgabe: Zeige, dass die Gerade:

$$y = 3(x+1)$$

Tangente an die Funktion

$$f(x) = e^{2x+1} + x + 1.$$

ist. Bestimme den Berührpunkt.

Lösung: I. a) Allgemein gilt, dass zur Schnittpunktberechnung zwischen zwei Funktionen f(x) und g(x) die Gleichung:

$$f(x) = g(x) \quad (*)$$

nach x aufzulösen ist. Die Lösungen x_1, x_2, … der Gleichung (*) sind die Schnittstellen der Funktionen; die Schnittpunkte ergeben sich aus aus dem Einsetzen der x_1, x_2, … in die Funktionsgleichungen f(x) oder g(x), so dass $S_1(x_1|f(x_1)) = (x_1|g(x_1))$, $S_2(x_2|f(x_2)) = (x_2|g(x_2))$, …
b) Ein Schnittpunkt $S(x_0|f(x_0)) = (x_0|g(x_0))$ ist ein Berührpunkt, wenn neben der Bedingung:

$$f(x_0) = g(x_0)$$

zusätzlich die Beziehung:

$$f'(x_0) = g'(x_0)$$

erfüllt ist mit den 1. Ableitungen f'(x) und g'(x) der Funktionen f(x) und g(x).

II. Es sei $y = 3(x+1) = g(x)$. Da wir die Gleichung $f(x) = g(x)$ algebraisch nicht nach x auflösen können, versuchen wir es über die Identität der 1. Ableitungen, die Gleichung $f'(x) = g'(x)$ mit:

$g(x) = y = 3(x+1) \;=>\; g'(x) = y' = 3$

$f(x) = e^{2x+1} + x + 1 \;=>\; f'(x) = e^{2x+1} \cdot 2 + 1 + 0 = 2e^{2x+1} + 1$

(nach den Ableitungsregeln für Exponential- und Potenzfunktionen sowie nach der Summenregel).
Wir lösen die Gleichung $f'(x) = g'(x)$ vermittelst der Umformungen:

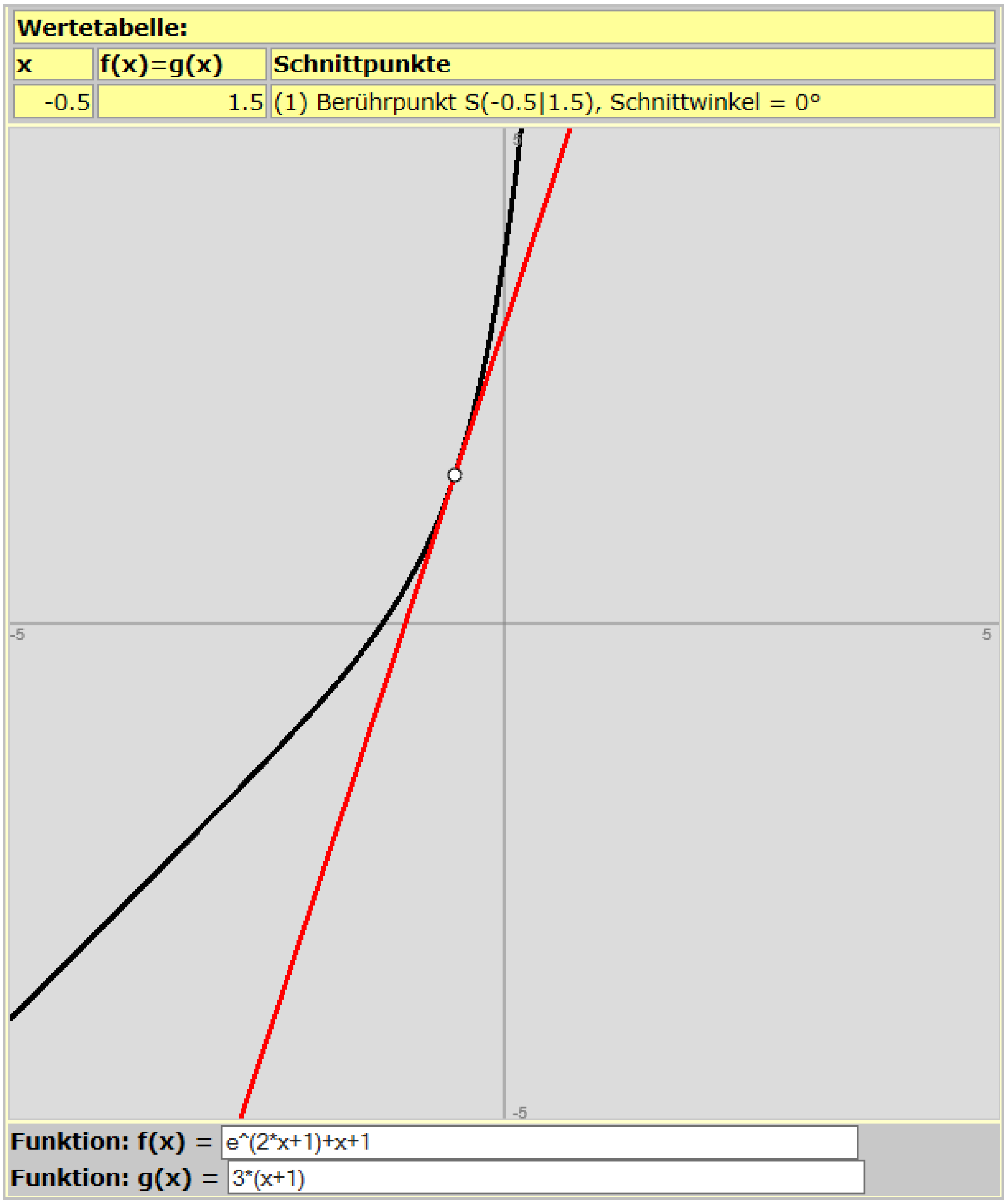
$f'(x) = g'(x)$	
$2e^{2x+1} + 1 = 3$	| -1
$2e^{2x+1} = 2$	| :2
$e^{2x+1} = 1$	| ln()
2x+1 = 0	| -1
2x = -1	| :2
x = -0,5	

An der Stelle x_0 = -0,5 könnte ein Berührpunkt vorliegen, wenn dort ein Schnittpunkt vorhanden ist, d.h. wenn $f(x_0) = g(x_0)$ gilt. Nun ist:

$y = g(x) = 3(x+1) \;=>\; g(-0,5) = 3(-0,5+1) = 3 \cdot 0,5 = 1,5$

$f(x) = e^{2x+1} + x + 1 \;=>\; f(-0,5) = e^{2\cdot(-0,5)+1} + (-0,5) + 1 = e^0 - 0,5 + 1 = 1,5$,

d.h. die beiden Funktionswerte f(-0,5) = g(-0,5) stimmen überein. Der Punkt B(-0,5|1,5) ist also in der Tat der Berührpunkt von Gerade y und Funktion f(x), die Gerade y ist mithin Tangente an die Funktion f(x) im Berührpunkt (siehe auch die Abbildung).



III. Wir machen noch die Probe, indem wir die Tangentengleichung zu $f(x) = e^{2x+1} + x + 1$ an der Stelle x_0 = -0,5 gemäß der Tangentenformel:

$t: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$,

also gemäß:

$t: y = f'(-0{,}5)(x - (-0{,}5)) + f(-0{,}5) = f'(-0{,}5)(x + 0{,}5) + f(-0{,}5)$,

bestimmen. Wie eben gesehen, ist f(-0,5) = 1,5; wegen der Ableitung $f'(x) = 2e^{2x+1} + 1$ gilt zudem: f'(-0,5) = 3. Einsetzen von f(-0,5) und f'(-0,5) in die Tangentengleichung führt auf:

$t: y = 3(x + 0{,}5) + 1{,}5 = 3x + 1{,}5 + 1{,}5 = 3x + 3 = 3(x + 1)$

und damit auf die gewünschte Gerade der Aufgabenstellung.

www.michael-buhlmann.de / 11.2016 / Aufgabe 286