Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Gegeben ist die folgende Tabelle, die Höhe (h) und zugehörigen Radius (r) der parallel zur x-Achse liegenden Kontur einer Blumenvase darstellt ($0 \le h \le 12$):

h (cm)	0	2	4	6	8	10	12
r (cm)	3,0	2,5	3,2	4,4	5,4	6,0	6,0

a) Bestimme eine ganz rationale Funktion 3. Grades, die die Kontur der Blumenvase nachzeichnet.

b) Durch Rotation um die x-Achse entsteht aus der Kontur der Drehkörper der 12 cm hohen Blumenvase. Wie viel Wasser passt in die Vase?

c) Wie viel Wasser ist in der Vase, wenn der Wasserstand 8 bzw. 10 cm hoch ist? Wie hoch ist der Wasserstand, wenn sich in der Vase ein halber Liter Wasser befindet?

Lösung: a) I. Zur Bestimmung der ganz rationalen Funktion $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$, d.h. der Unbekannten a, b, c, d, wählen wir aus der obigen Tabelle die Punkte P(0|3), Q(4|3,2), R(8|5,4), S(12|6) aus und erhalten die vier Gleichungen und das lineare Gleichungssystem:

P: $f(0) = a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d = 3 \Rightarrow d = 3$
Q: $f(4) = a\cdot 4^3+b\cdot 4^2+c\cdot 4+d = 3{,}2 \Rightarrow 64a+16b+4c+d = 3{,}2$
R: $f(8) = a\cdot 8^3+b\cdot 8^2+c\cdot 8+d = 5{,}4 \Rightarrow 512a+64b+8c+d = 5{,}4$
Q: $f(12) = a\cdot 12^3+b\cdot 12^2+c\cdot 12+d = 6 \Rightarrow 1728a+144b+12c+d = 6$

II. Wir lösen das lineare Gleichungssystem, etwa mit dem Gauß-Algorithmus:

Lineares Gleichungssystem:

$+ 1d = 3$
$+ 64a + 16b + 4c + 1d = 3.2$
$+ 512a + 64b + 8c + 1d = 5.4$
$+ 1728a + 144b + 12c + 1d = 6$

Anfangstableau:

0 0 0 1 | 3
64 16 4 1 | 3.2
512 64 8 1 | 5.4
1728 144 12 1 | 6

Zeilentausch: 1 <-> 2 /

64 16 4 1 | 3.2
0 0 0 1 | 3
512 64 8 1 | 5.4
1728 144 12 1 | 6

1. Schritt: 1*(*3*) - 8*(*1*) / 1*(*4*) - 27*(*1*) /

64 16 4 1 | 3.2
0 0 0 1 | 3
0 -64 -24 -7 | -20.2
0 -288 -96 -26 | -80.4

Zeilentausch: 2 <-> 3 /

64 16 4 1 | 3.2
0 -64 -24 -7 | -20.2
0 0 0 1 | 3
0 -288 -96 -26 | -80.4

2. Schritt: 4*(*1*) + 1*(*2*) / -2*(*4*) + 9*(*2*) /

256 0 -8 -3 | -7.4
0 -64 -24 -7 | -20.2
0 0 0 1 | 3
0 0 -24 -11 | -21

Zeilentausch: 3 <-> 4 /

256 0 -8 -3 | -7.4
0 -64 -24 -7 | -20.2
0 0 -24 -11 | -21
0 0 0 1 | 3

3. Schritt: -3*(*1*) + 1*(*3*) / -1*(*2*) + 1*(*3*) /

-768 0 0 -2 | 1.2
0 64 0 -4 | -0.8
0 0 -24 -11 | -21
0 0 0 1 | 3

4. Schritt: 1*(*1*) + 2*(*4*) / 1*(*2*) + 4*(*4*) / 1*(*3*) + 11*(*4*) /

-768 0 0 0 | 7.2
0 64 0 0 | 11.2
0 0 -24 0 | 12
0 0 0 1 | 3

Teilen: (*1*):(-768) / (*2*):64 / (*3*):(-24) /

1 0 0 0 | -0.009375
0 1 0 0 | 0.175
0 0 1 0 | -0.5
0 0 0 1 | 3

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$+ 1a = -0.009375$
$+ 1b = 0.175$
$+ 1c = -0.5$
$+ 1d = 3$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$a = -0.009375$
$b = 0.175$
$c = -0.5$
$d = 3$

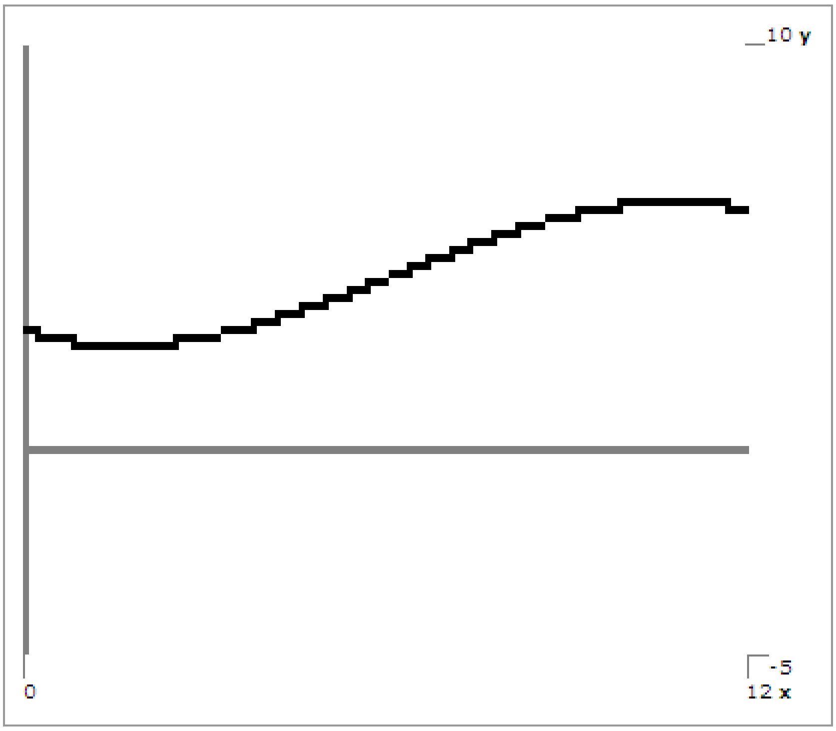
Die gesuchte ganz rationale Funktion 3. Grades lautet also:

$$f(x) = -0.009375x^3 + 0.175x^2 – 0.5x + 3$$

mit:

III. Wertetabelle, Graph:

$f(x) = -0.009375x^3 + 0.175x^2 – 0.5x + 3$				
x	**y = f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	Besondere Kurvenpunkte
0	3	-0.5	0.35	Schnittpunkt $S_y(0\|3)$
1.64	2.6093	0	0.26	Tiefpunkt T(1.64|2.61)
6.22	4.4045	0.59	0	Wendepunkt W(6.22|4.4)
10.79	6.2022	0	-0.26	Hochpunkt H(10.79|6.2)



b) Das Volumen der Vase als Rotationskörper berechnet sich als:

$$V = \pi \int_0^{12} (-0{,}009375x^3 + 0{,}175x^2 - 0{,}5x + 3)^2 \, dx = 784{,}1271$$

Die Vase kann also V = 784,13 cm^3 Wasser aufnehmen (Wasserstand bei 12 cm Höhe).

c) I. Analog ergibt sich bei einem Wasserstand von 8 cm mit:

$$V = \pi \int_0^{8} (-0{,}009375x^3 + 0{,}175x^2 - 0{,}5x + 3)^2 \, dx = 333{,}6869$$

ein Volumen V = 333,59 cm^3, bei einem Wasserstand von 10 cm:

$$V = \pi \int_0^{10} (-0{,}009375x^3 + 0{,}175x^2 - 0{,}5x + 3)^2 \, dx = 546{,}3032$$

ein Volumen V = 546,3 cm^3.

II. Es gilt nun für das Wasservolumen in der Vase: V = 0,5 Liter = 500 cm^3. Die dazugehörige Höhe des Wasserstandes folgt (etwa durch Raten) mit:

$$V = \pi \int_0^{h} (-0{,}009375x^3 + 0{,}175x^2 - 0{,}5x + 3)^2 \, dx = 500$$

als Höhe h = 9,6017 ≈ 9,6 cm.

07.2014 / Aufgabe 5