

# Mathematikaufgaben

## > Analysis

### > Bestimmungsaufgabe

**Aufgabe:** Gegeben ist die folgende Tabelle, die Höhe (h) und zugehörigen Radius (r) der parallel zur x-Achse liegenden Kontur einer Blumenvase darstellt ( $0 \leq h \leq 12$ ):

h (cm)	0	2	4	6	8	10	12
r (cm)	3,0	2,5	3,2	4,4	5,4	6,0	6,0

- a) Bestimme eine ganz rationale Funktion 3. Grades, die die Kontur der Blumenvase nachzeichnet.
- b) Durch Rotation um die x-Achse entsteht aus der Kontur der Drehkörper der 12 cm hohen Blumenvase. Wie viel Wasser passt in die Vase?
- c) Wie viel Wasser ist in der Vase, wenn der Wasserstand 8 bzw. 10 cm hoch ist? Wie hoch ist der Wasserstand, wenn sich in der Vase ein halber Liter Wasser befindet?

**Lösung:** a) I. Zur Bestimmung der ganz rationalen Funktion  $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ , d.h. der Unbekannten a, b, c, d, wählen wir aus der obigen Tabelle die Punkte P(0|3), Q(4|3,2), R(8|5,4), S(12|6) aus und erhalten die vier Gleichungen und das lineare Gleichungssystem:

$$P: f(0) = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 3 \Rightarrow d = 3$$

$$Q: f(4) = a \cdot 4^3 + b \cdot 4^2 + c \cdot 4 + d = 3,2 \Rightarrow 64a + 16b + 4c + d = 3,2$$

$$R: f(8) = a \cdot 8^3 + b \cdot 8^2 + c \cdot 8 + d = 5,4 \Rightarrow 512a + 64b + 8c + d = 5,4$$

$$S: f(12) = a \cdot 12^3 + b \cdot 12^2 + c \cdot 12 + d = 6 \Rightarrow 1728a + 144b + 12c + d = 6$$

II. Wir lösen das lineare Gleichungssystem, etwa mit dem Gauß-Algorithmus:

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{r} + 1d = 3 \\ + 64a + 16b + 4c + 1d = 3,2 \\ + 512a + 64b + 8c + 1d = 5,4 \\ + 1728a + 144b + 12c + 1d = 6 \end{array}$$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 64 & 16 & 4 & 1 & 3,2 \\ 512 & 64 & 8 & 1 & 5,4 \\ 1728 & 144 & 12 & 1 & 6 \end{array}$$

Zeilentausch: 1 <-> 2 /

$$\begin{array}{cccc|c} 64 & 16 & 4 & 1 & 3,2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 512 & 64 & 8 & 1 & 5,4 \\ 1728 & 144 & 12 & 1 & 6 \end{array}$$

1. Schritt:  $1 \cdot (3) - 8 \cdot (1) / 1 \cdot (4) - 27 \cdot (1) /$

$$\begin{array}{cccc|c} 64 & 16 & 4 & 1 & 3,2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -64 & -24 & -7 & -20,2 \\ 0 & -288 & -96 & -26 & -80,4 \end{array}$$

Zeilentausch: 2 <-> 3 /

$$\begin{array}{cccc|c} 64 & 16 & 4 & 1 & 3.2 \\ 0 & -64 & -24 & -7 & -20.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -288 & -96 & -26 & -80.4 \end{array}$$

2. Schritt:  $4 \cdot (1) + 1 \cdot (2) / -2 \cdot (4) + 9 \cdot (2) /$

$$\begin{array}{cccc|c} 256 & 0 & -8 & -3 & -7.4 \\ 0 & -64 & -24 & -7 & -20.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -24 & -11 & -21 \end{array}$$

Zeilentausch: 3 <-> 4 /

$$\begin{array}{cccc|c} 256 & 0 & -8 & -3 & -7.4 \\ 0 & -64 & -24 & -7 & -20.2 \\ 0 & 0 & -24 & -11 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

3. Schritt:  $-3 \cdot (1) + 1 \cdot (3) / -1 \cdot (2) + 1 \cdot (3) /$

$$\begin{array}{cccc|c} -768 & 0 & 0 & -2 & 1.2 \\ 0 & 64 & 0 & -4 & -0.8 \\ 0 & 0 & -24 & -11 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

4. Schritt:  $1 \cdot (1) + 2 \cdot (4) / 1 \cdot (2) + 4 \cdot (4) / 1 \cdot (3) + 11 \cdot (4) /$

$$\begin{array}{cccc|c} -768 & 0 & 0 & 0 & 7.2 \\ 0 & 64 & 0 & 0 & 11.2 \\ 0 & 0 & -24 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

Teilen: (1):(-768) / (2):64 / (3):(-24) /

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -0.009375 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0.175 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcl} + 1a & & = -0.009375 \\ + 1b & & = 0.175 \\ + 1c & & = -0.5 \\ + 1d & = & 3 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

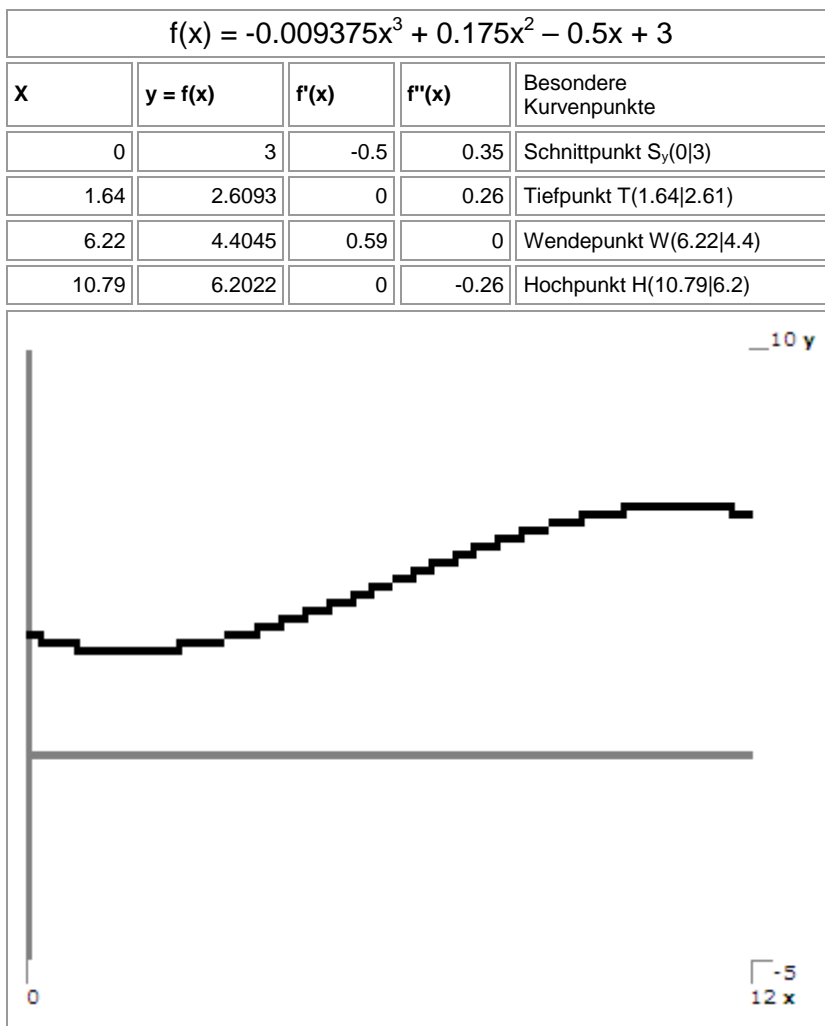
$$\begin{array}{l} a = -0.009375 \\ b = 0.175 \\ c = -0.5 \\ d = 3 \end{array}$$

Die gesuchte ganz rationale Funktion 3. Grades lautet also:

$$f(x) = -0.009375x^3 + 0.175x^2 - 0.5x + 3$$

mit:

### III. Wertetabelle, Graph:



b) Das Volumen der Vase als Rotationskörper berechnet sich als:

$$V = \pi \int_0^{12} (-0,009375x^3 + 0,175x^2 - 0,5x + 3)^2 dx = 784,1271$$

Die Vase kann also  $V = 784,13 \text{ cm}^3$  Wasser aufnehmen (Wasserstand bei 12 cm Höhe).

c) I. Analog ergibt sich bei einem Wasserstand von 8 cm mit:

$$V = \pi \int_0^8 (-0,009375x^3 + 0,175x^2 - 0,5x + 3)^2 dx = 333,6869$$

ein Volumen  $V = 333,59 \text{ cm}^3$ , bei einem Wasserstand von 10 cm:

$$V = \pi \int_0^{10} (-0,009375x^3 + 0,175x^2 - 0,5x + 3)^2 dx = 546,3032$$

ein Volumen  $V = 546,3 \text{ cm}^3$ .

II. Es gilt nun für das Wasservolumen in der Vase:  $V = 0,5 \text{ Liter} = 500 \text{ cm}^3$ . Die dazugehörige Höhe des Wasserstandes folgt (etwa durch Raten) mit:

$$V = \pi \int_0^h (-0,009375x^3 + 0,175x^2 - 0,5x + 3)^2 dx = 500$$

als Höhe  $h = 9,6017 \approx 9,6 \text{ cm}$ .