Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Bestimmungsaufgabe

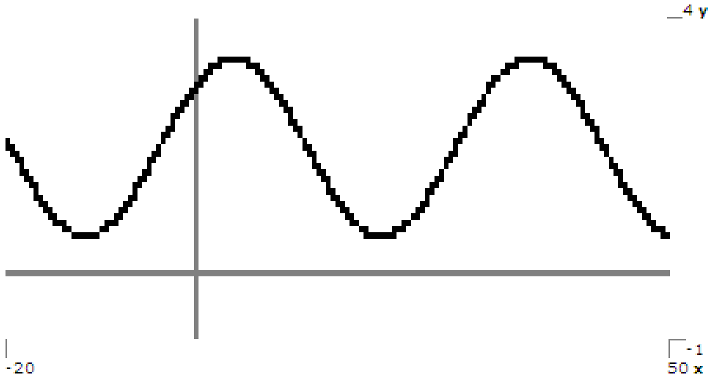
Aufgabe: Für die trigonometrische Funktion mit Funktionsterm

$$f(x) = 2 + \sin(0{,}2x) + \cos(0{,}2x)$$

ist eine Darstellung der Form

$$f(x) = a\cos(bx - c) + d$$

zu finden. Die Funktion hat dabei das Aussehen:



Lösung: Wir lösen die Bestimmungsaufgabe wie folgt: Für die vier Unbekannten a, b, c und d sind vier Gleichungen aufzustellen, mit denen die Unbekannten bestimmt werden können.

I. Die Periode p von $f(x) = 2 + \sin(0{,}2x) + \cos(0{,}2x)$ ist: $p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{0{,}2} = 10\pi$, da die trigonometrischen Terme von f(x) dieselben Argumente 0,2x enthalten. Dann muss die Periode p von $f(x) = a\cos(bx - c) + d$ ebenfalls 2π betragen. Wegen $p = \frac{2\pi}{b}$ und $10\pi = \frac{2\pi}{b}$ ist: $b = \frac{2\pi}{10\pi} = 0{,}2$, und wir haben die erste der vier Variablen bestimmt, so dass unsere gesuchte Funktion jetzt lautet: $f(x) = a\cos(0{,}2x - c) + d$.

II. Der Punkt P(0|3) gehört wegen $f(0) = 2 + \sin(0) + \cos(0) = 2 + 1$ zur Funktion f(x). Die Bedingung f(0) = 3 führt dann auf die Gleichung (1): $3 = f(0) = a\cos(0 - c) + d = a\cos(-c) + d$ $= a\cos(c) + d$. Wegen $f'(x) = 0{,}2\cos(0{,}2x) - 0{,}2\sin(0{,}2x)$ ist weiter: $f'(0) = 0{,}2\cos(0) - 0{,}2\sin(0) = 0{,}2$, so dass mit $f(x) = a\cos(0{,}2x - c) + d$ und $f'(x) = -0{,}2a\sin(0{,}2x - c)$ folgt: $0{,}2 = f'(0) = -0{,}2a\sin(-c) = 0{,}2a\sin(c)$, d.h.: $1 = a\sin(c)$ (2).

III. Der Punkt Q($\frac{5\pi}{2}$|3) liegt wegen $f(\frac{5\pi}{2}) = 2 + \sin(\frac{\pi}{2}) + \cos(\frac{\pi}{2}) = 2 + 1 = 3$ auf der Funktion f(x). Wir setzen ein und erhalten auf Grund von: $\sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ die Gleichung (3): $3 = f(\frac{5\pi}{2}) = a\cos(\frac{\pi}{2} - c) + d = a\sin(c) + d$.

IV. Wir subtrahieren nun die Gleichung (2) von (3) und erhalten: $3-1 = a\sin(c) + d - a\sin(c)$, also: d = 2. Die gesuchte Funktion heißt jetzt: $f(x) = a\cos(0{,}2x - c) + 2$.

V. Aus Gleichung (1) wird mit d = 2 Gleichung (4): $1 = a\cos(c)$. Wir dividieren Gleichung (2) durch (4) und erhalten: $\frac{1}{1} = \frac{a\sin(c)}{a\cos(c)}$, also: $1 = \tan(c)$ und damit: $c = \frac{\pi}{4}$. Die Funktion heißt nun:

$$f(x) = a\cos(0{,}2x - \frac{\pi}{4}) + 2.$$

VI. Nun ist noch a zu bestimmen. Wir setzen $c = \frac{\pi}{4}$ ein in Gleichung (2) und erhalten:

$1 = a\sin(\frac{\pi}{4}) = a \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$, so dass $a = \sqrt{2}$ gilt.

Die gesuchte Funktion lautet vollständig: $f(x) = \sqrt{2}\cos(0{,}2x - \frac{\pi}{4}) + 2$. Und es gilt die Identität:

$$f(x) = \sqrt{2}\cos(0{,}2x - \frac{\pi}{4}) + 2 = 2 + \sin(0{,}2x) + \cos(0{,}2x).$$

07.2014 / Aufgabe 11