Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Gesucht ist ein Polynom, eine ganz rationale Funktion f(x) 3. Grades mit den Eigenschaften: f(x) besitzt Nullstellen bei x=-1 und x=3, f(x) hat einen Tiefpunkt bei x=$\frac{5}{3}$, f(x) schneidet die y-Achse bei y=-3.

Lösung: I. Ansatz: f(x) als Polynom 3. Grades lässt sich darstellen als:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

mit der 1. Ableitung

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

mit zu suchenden Koeffizienten a,b,c,dε**R**.

II. Eigenschaften: Es gilt:

$f(-1) = 0$ (Nullstelle bei x=-1)

$f(4) = 0$ (Nullstelle bei x=4)

$f'(\frac{5}{3}) = 0$ (Notwendige Bedingung für Tiefpunkt x=$\frac{5}{3}$)

$f(0) = -3$ (Schnittpunkt mit der y-Achse im Punkt P(0|-3))

III. Aufstellen des Gleichungssystems für die Koeffizienten des Polynoms: Es ergibt sich durch Einsetzen und Gleichsetzen:

$$0 = f(-1) = a\cdot(-1)^3 + b\cdot(-1)^2 + c\cdot(-1) + d$$

$$0 = f(4) = a\cdot 3^3 + b\cdot 3^2 + c\cdot 3 + d$$

$$0 = f'(\frac{5}{3}) = 3a\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^2 + 2b\cdot\frac{5}{3} + c$$

$$-3 = f(0) = a\cdot 0^3 + b\cdot 0^2 + c\cdot 0 + d$$

Also:

$$0 = -a + b - c + d$$

$$0 = 27a + 9b + 3c + d$$

$$0 = \frac{25}{3}a + \frac{10}{3}b + c$$

$$-3 = d$$

IV. Bestimmung der Koeffizienten des Polynoms: Wegen d=-3 erhalten wir (durch Subtraktion von d=-3 in den ersten beiden Gleichungen und Multiplikation mit 3 in der dritten Gleichung) das Gleichungssystem:

$$-a + b - c = 3$$

$$27a + 9b + 3c = 3$$

$$25a + 10b + 3c = 0$$

(Multiplikation der 1. Gleichung mit 3)

$$-3a+3b-3c=9$$
$$27a+9b+3c=3$$
$$25a+10b+3c=0$$

(Addition der ersten zu der zweiten Gleichung)

$$-3a+3b-3c=9$$
$$24a+12b=12$$
$$25a+10b+3c=0$$

(Division der 2. Gleichung durch 12, Addition der ersten zu der dritten Gleichung)

$$-3a+3b-3c=9$$
$$2a+b=1$$
$$22a+13b=9$$

(Multiplikation der 2. Gleichung mit 13)

$$-a+b-c=3$$
$$26a+13b=13$$
$$22a+13b=9$$

(Subtraktion der zweiten von der dritten Gleichung)

$$-a+b-c=3$$
$$26a+13b=13$$
$$-4a=-4$$

(Division der 2. Gleichung durch 13, Auflösen nach a)

$$-a+b-c=3$$
$$2a+b=1$$
$$a=1$$

(Auflösen nach b und c)

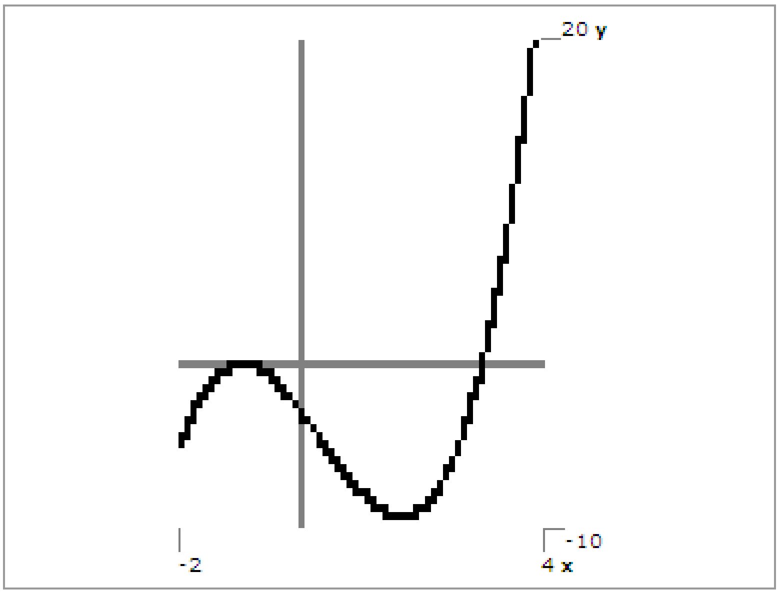
$$a=1$$
$$2+b=1 \Rightarrow b=-1$$
$$-1-1-c=3 \Rightarrow -2-c=3 \Rightarrow c=-5$$

Die gesuchten Koeffizienten sind: a=1, b=-1, c=-5, d=-3, die Funktion hat die Gleichung:
$f(x)=x^3-x^2-5x-3$.

V. Probe: Wegen der notwendigen Bedingung $f'(\frac{5}{3})=0$ ist eine Probe zu machen, ob die gefundene Funktion wirklich alle geforderten Eigenschaften erfüllt. Nun ist:
$f'(x)=3x^2-2x-5,\ f''(x)=6x-2$ und damit: $f''(\frac{5}{3})=10-2=8>0$ mit x=$\frac{5}{3}$ als Tiefpunkt. Die Funktion erfüllt alle Eigenschaften.

VI. Wertetabelle, Graph:

$f(x)=x^3-x^2-5x-3$					
x	**y = f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**f'''(x)**	Besondere Kurvenpunkte
-1	0	0	-8	6	Nullstelle N(-1|0) = Hochpunkt H(-1|0)
0	-3	-5	-2	6	Schnittpunkt S_y(0|-3)
0.34	-4.7763	-5.3332	0	6	Wendepunkt W(0.34|-4.78)
1.67	-9.4814	0	8.02	6	Tiefpunkt T(1.67|-9.48)
3	0	16	16	6	Nullstelle N(3|0)



07.2014 / Aufgabe 13