

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Gesucht ist ein Polynom, eine ganz rationale Funktion $f(x)$ 3. Grades mit den Eigenschaften: $f(x)$ besitzt Nullstellen bei $x=-1$ und $x=3$, $f(x)$ hat einen Tiefpunkt bei $x=\frac{5}{3}$, $f(x)$ schneidet die y -Achse bei $y=-3$.

Lösung: I. Ansatz: $f(x)$ als Polynom 3. Grades lässt sich darstellen als:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

mit der 1. Ableitung

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

mit zu suchenden Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbf{R}$.

II. Eigenschaften: Es gilt:

$$f(-1) = 0 \quad (\text{Nullstelle bei } x=-1)$$

$$f(4) = 0 \quad (\text{Nullstelle bei } x=4)$$

$$f'\left(\frac{5}{3}\right) = 0 \quad (\text{Notwendige Bedingung für Tiefpunkt } x=\frac{5}{3})$$

$$f(0) = -3 \quad (\text{Schnittpunkt mit der } y\text{-Achse im Punkt } P(0|-3))$$

III. Aufstellen des Gleichungssystems für die Koeffizienten des Polynoms: Es ergibt sich durch Einsetzen und Gleichsetzen:

$$0 = f(-1) = a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d$$

$$0 = f(4) = a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d$$

$$0 = f'\left(\frac{5}{3}\right) = 3a \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 + 2b \cdot \frac{5}{3} + c$$

$$-3 = f(0) = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d$$

Also:

$$0 = -a + b - c + d$$

$$0 = 27a + 9b + 3c + d$$

$$0 = \frac{25}{3}a + \frac{10}{3}b + c$$

$$-3 = d$$

IV. Bestimmung der Koeffizienten des Polynoms: Wegen $d=-3$ erhalten wir (durch Subtraktion von $d=-3$ in den ersten beiden Gleichungen und Multiplikation mit 3 in der dritten Gleichung) das Gleichungssystem:

$$-a + b - c = 3$$

$$27a + 9b + 3c = 3$$

$$25a + 10b + 3c = 0$$

(Multiplikation der 1. Gleichung mit 3)

$$-3a + 3b - 3c = 9$$

$$27a + 9b + 3c = 3$$

$$25a + 10b + 3c = 0$$

(Addition der ersten zu der zweiten Gleichung)

$$-3a + 3b - 3c = 9$$

$$24a + 12b = 12$$

$$25a + 10b + 3c = 0$$

(Division der 2. Gleichung durch 12, Addition der ersten zu der dritten Gleichung)

$$-3a + 3b - 3c = 9$$

$$2a + b = 1$$

$$22a + 13b = 9$$

(Multiplikation der 2. Gleichung mit 13)

$$-a + b - c = 3$$

$$26a + 13b = 13$$

$$22a + 13b = 9$$

(Subtraktion der zweiten von der dritten Gleichung)

$$-a + b - c = 3$$

$$26a + 13b = 13$$

$$-4a = -4$$

(Division der 2. Gleichung durch 13, Auflösen nach a)

$$-a + b - c = 3$$

$$2a + b = 1$$

$$a = 1$$

(Auflösen nach b und c)

$$a = 1$$

$$2 + b = 1 \Rightarrow b = -1$$

$$-1 - 1 - c = 3 \Rightarrow -2 - c = 3 \Rightarrow c = -5$$

Die gesuchten Koeffizienten sind: $a=1$, $b=-1$, $c=-5$, $d=-3$, die Funktion hat die Gleichung:

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3.$$

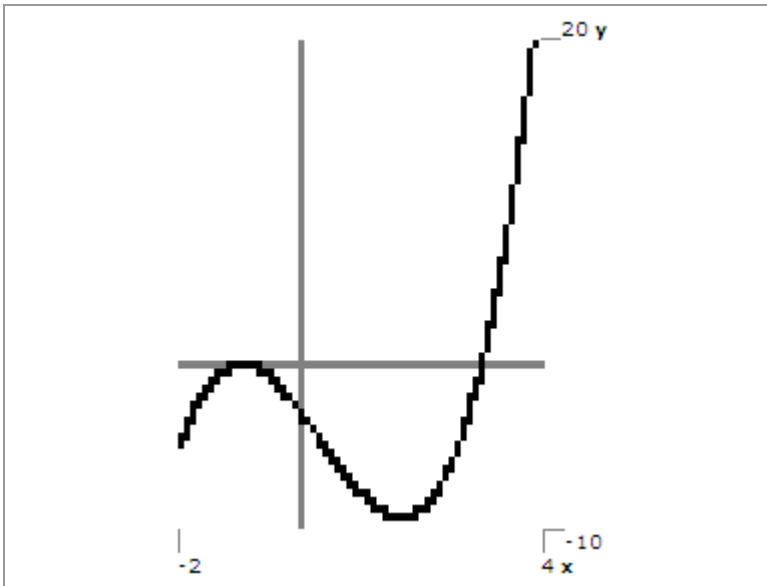
V. Probe: Wegen der notwendigen Bedingung $f'(\frac{5}{3}) = 0$ ist eine Probe zu machen, ob die gefundene Funktion wirklich alle geforderten Eigenschaften erfüllt. Nun ist:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 5, f''(x) = 6x - 2 \text{ und damit: } f''(\frac{5}{3}) = 10 - 2 = 8 > 0 \text{ mit } x = \frac{5}{3} \text{ als Tiefpunkt. Die}$$

Funktion erfüllt alle Eigenschaften.

VI. Wertetabelle, Graph:

$f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$					
x	y = f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-1	0	0	-8	6	Nullstelle N(-1 0) = Hochpunkt H(-1 0)
0	-3	-5	-2	6	Schnittpunkt S _y (0 -3)
0.34	-4.7763	-5.3332	0	6	Wendepunkt W(0.34 -4.78)
1.67	-9.4814	0	8.02	6	Tiefpunkt T(1.67 -9.48)
3	0	16	16	6	Nullstelle N(3 0)



07.2014 / Aufgabe 13