Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Ein Polynom, eine ganz rationale Funktion f(x) 3. Grades besitzt im Punkt x=0 die Wendetangente y = -2x-4 und schneidet die x-Achse bei x=2. Wie lautet die Funktionsgleichung?

Lösung: I. Ansatz: f(x) als Polynom 3. Grades lässt sich darstellen als:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

mit der 1. und 2. Ableitung

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$f''(x) = 6ax + 2b$$

mit zu suchenden Koeffizienten a,b,c,dε**R**.

II. Eigenschaften: Es gilt:

$f(0) = -4$ (wegen der Wendetangente und f(0) = y(0) = -4)
$f'(0) = -2$ (wegen der Wendetangente und f'(0) = y'(0) = -2)
$f''(0) = 0$ (Notwendige Bedingung des Wendepunktes x=0)
$f(2) = 0$ (Nullstelle bei x=2)

III. Aufstellen des Gleichungssystems für die Koeffizienten des Polynoms: Es ergibt sich durch Einsetzen und Gleichsetzen:

$$-4 = f(0) = 0 + 0 + 0 + d$$
$$-2 = f'(0) = 0 + 0 + c$$
$$0 = f''(0) = 0 + 2b$$
$$0 = f(2) = 8a + 4b + 2c + d$$

IV. Bestimmung der Koeffizienten des Polynoms: Wir haben das Gleichungssystem:

$$d = -4$$
$$c = -2$$
$$2b = 0$$
$$8a + 4b + 2c + d = 0$$

(Auflösen nach a und b)

$$d = -4$$
$$c = -2$$
$$b = 0$$
$$8a - 4 - 4 = 0 \Rightarrow 8a = 8 \Rightarrow a = 1$$

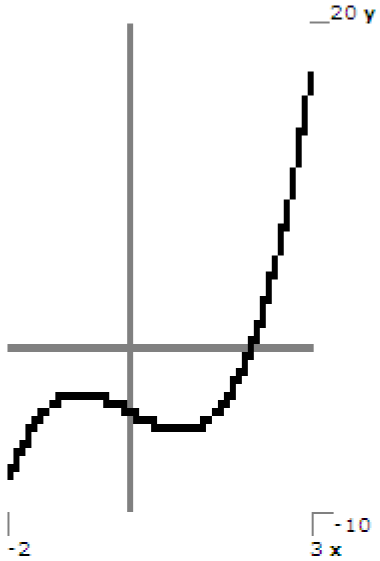
Die gesuchten Koeffizienten sind: a=1, b=0, c=-2, d=-4, die Funktion hat die Gleichung: $f(x) = x^3 - 2x - 4$.

V. Probe: Wegen der notwendigen Bedingung $f''(0) = 0$ ist eine Probe zu machen, ob die gefundene Funktion wirklich alle geforderten Eigenschaften erfüllt. Nun ist: $f'(x) = 3x^2 - 2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$ und damit: $f'''(0) = 6 \neq 0$ mit x=0 als Wendepunkt. Die Funktion erfüllt alle Eigenschaften.

VI. Wertetabelle, Graph:

$$f(x) = x^3 - 2x - 4$$

x	y = f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-0.81	-2.9114	0	-4.86	6	Hochpunkt H(-0.81|-2.91)
0	-4	-2	0	6	Schnittpunkt S_y(0|-4) = Wendepunkt W(0|-4)
0.82	-5.0886	0	4.92	6	Tiefpunkt T(0.82|-5.09)
2	0	10	12	6	Nullstelle N(2|0)



07.2014 / Aufgabe 14