Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Eine ganz rationale Funktion f(x) 3. Grades verläuft durch die vier Punkte A(-2|1), B(1|-5/4), C(4|10) und D(6|45). Wie lautet die Funktionsgleichung?

Lösung: I. Ansatz: f(x) als Polynom 3. Grades lässt sich darstellen als:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

mit zu suchenden Koeffizienten a,b,c,dε**R**.

II. Eigenschaften: Es gilt auf Grund der Punktprobe mit den vier Punkten A, B, C, D:

$f(-2) = 1$ (Punkt A(-2|1))

$f(1) = -\frac{5}{4} = -1,25$ (Punkt B(1|-5/4))

$f(4) = 10$ (Punkt C(4|10))

$f(6) = 45$ (Punkt D(6|45))

III. Aufstellen des Gleichungssystems für die Koeffizienten des Polynoms: Es ergibt sich durch Einsetzen und Gleichsetzen:

$$f(-2) = a(-2)^3 + b(-2)^2 + c(-2) + d = 1$$

$$f(1) = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = -1,25$$

$$f(4) = a \cdot 4^3 + b \cdot 4^2 + c \cdot 4 + d = 10$$

$$f(6) = a \cdot 6^3 + b \cdot 6^2 + c \cdot 6 + d = 45$$

IV. Bestimmung der Koeffizienten des Polynoms: Wir haben das lineare Gleichungssystem wie folgt zu lösen:

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrr} - & 8a & + & 4b & - & 2c & + & 1d & = & 1 \\ + & 1a & + & 1b & + & 1c & + & 1d & = & -1.25 \\ + & 64a & + & 16b & + & 4c & + & 1d & = & 10 \\ + & 216a & + & 36b & + & 6c & + & 1d & = & 45 \end{array}$$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{rrrr|r} -8 & 4 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1.25 \\ 64 & 16 & 4 & 1 & 10 \\ 216 & 36 & 6 & 1 & 45 \end{array}$$

1. Schritt: 8*(*2*) + 1*(*1*) / 1*(*3*) + 8*(*1*) / 1*(*4*) + 27*(*1*) /

$$\begin{array}{rrrr|r} -8 & 4 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 12 & 6 & 9 & -9 \\ 0 & 48 & -12 & 9 & 18 \\ 0 & 144 & -48 & 28 & 72 \end{array}$$

2. Schritt: 1*(*3*) - 4*(*2*) / 1*(*4*) - 12*(*2*) /

$$\begin{array}{rrrr|r} -8 & 4 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 12 & 6 & 9 & -9 \\ 0 & 0 & -36 & -27 & 54 \\ 0 & 0 & -120 & -80 & 180 \end{array}$$

3. Schritt: -3*(*4*) + 10*(*3*) /

$$\begin{array}{rrrr|r} -8 & 4 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 12 & 6 & 9 & -9 \\ 0 & 0 & -36 & -27 & 54 \\ 0 & 0 & 0 & -30 & 0 \end{array}$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr} - & 8a & + & 4b & - & 2c & + & 1d & = & 1 \\ & & + & 12b & + & 6c & + & 9d & = & -9 \\ & & & & - & 36c & - & 27d & = & 54 \\ & & & & & & - & 30d & = & 0 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$d = 0$
$c = -1.5$
$b = 0$
$a = 0.25$

Die gesuchten Koeffizienten sind: a=0,25, b=0, c=-1,5, d=0, die Funktion hat die Gleichung:

$$f(x) = 0{,}25x^3 - 1{,}5x = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x\,.$$

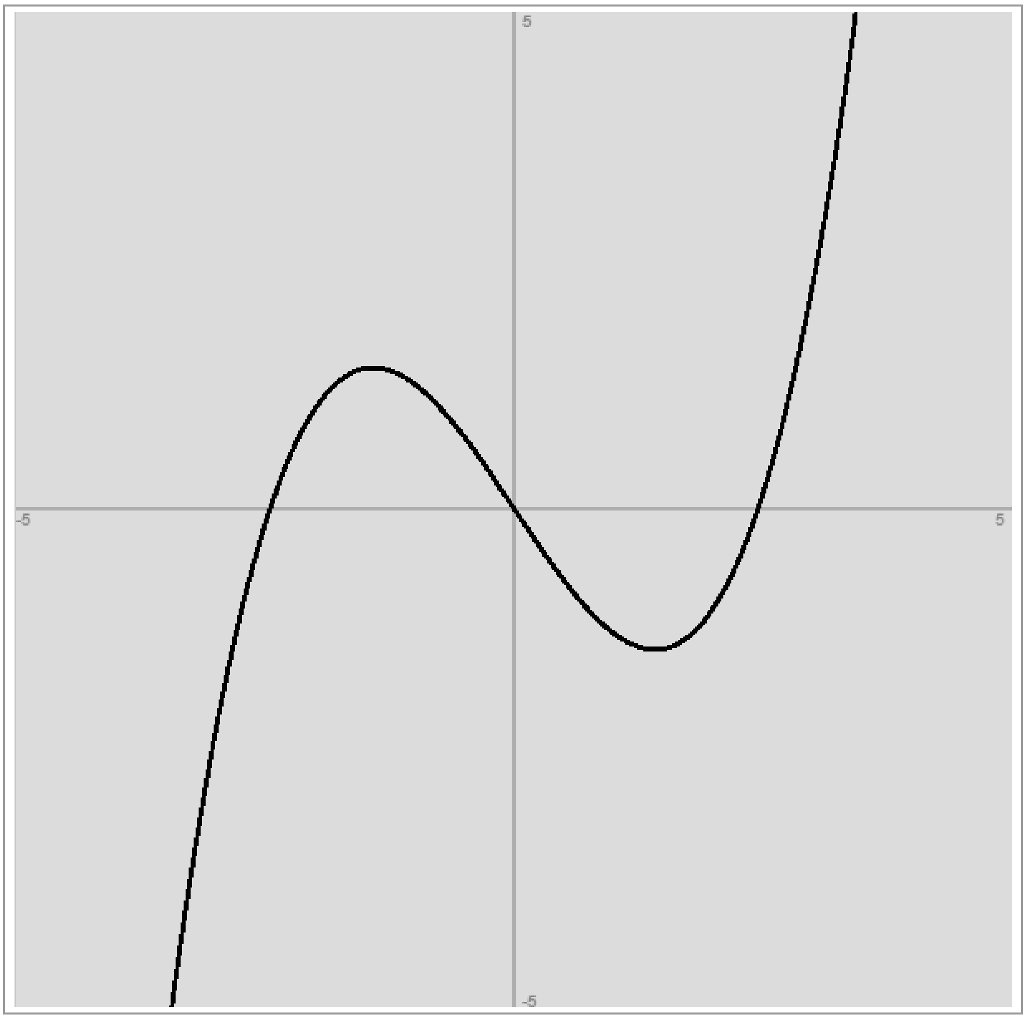
V. Wertetabelle, Graph:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x$$

Wertetabelle:

x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**f'''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-2.44	0.0283	2.9652	-3.66	1.5	Nullstelle N(-2.44|0.03)
-1.41	1.4142	-0.0089	-2.115	1.5	Hochpunkt H(-1.41|1.41)
0	0	-1.5	0	1.5	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Wendepunkt W(0|0)
1.42	-1.4142	0.0123	2.13	1.5	Tiefpunkt T(1.42|-1.41)
2.45	0.0015	3.0019	3.675	1.5	Nullstelle N(2.45|0)

Graph:



www.michael-buhlmann.de / 04.2016 / Aufgabe 222