

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Eine allgemeine Parabel 2. Grades verläuft durch die Punkte P(-4|65), Q(1|5), R(2|-1). Wie lautet die Funktionsgleichung?

Lösung: I. Ansatz: $f(x)$ als ganz rationale Funktion 2. Grades (Parabel) lässt sich darstellen als:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

mit zu suchendem Koeffizienten $a, b, c \in \mathbf{R}$.

II. Berechnung: Es gilt auf Grund der Punktprobe mit den drei Punkten P, Q, R:

$$f(-4) = 65 \quad (\text{Punkt P}(-4|65))$$

$$f(1) = 5 \quad (\text{Punkt Q}(1|5))$$

$$f(2) = -1 \quad (\text{Punkt R}(2|-1)).$$

III. Aufstellen des Gleichungssystems für die Koeffizienten der Parabel: Es ergibt sich durch Einsetzen und Gleichsetzen:

$$f(-4) = a(-4)^2 + b(-4) + c = 65$$

$$f(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 5$$

$$f(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = -1$$

und damit:

$$16a - 4b + c = 65$$

$$a + b + c = 5$$

$$4a + 2b + c = -1$$

IV. Bestimmung der Koeffizienten der Parabel: Wir haben das lineare Gleichungssystem wie folgt mit dem Gaußschen Algorithmus zu lösen:

Lineares Gleichungssystem:

$$+ 16a - 4b + 1c = 65$$

$$+ 1a + 1b + 1c = 5$$

$$+ 4a + 2b + 1c = -1$$

Anfangstableau:

$$16 \quad -4 \quad 1 \quad | \quad 65$$

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad | \quad 5$$

$$4 \quad 2 \quad 1 \quad | \quad -1$$

1. Schritt: $16 \cdot (2) - 1 \cdot (1) / 4 \cdot (3) - 1 \cdot (1) /$

$$16 \quad -4 \quad 1 \quad | \quad 65$$

$$0 \quad 20 \quad 15 \quad | \quad 15$$

$$0 \quad 12 \quad 3 \quad | \quad -69$$

2. Schritt: $5 \cdot (3) - 3 \cdot (2) /$

$$\begin{array}{ccc|c} 16 & -4 & 1 & 65 \\ 0 & 20 & 15 & 15 \\ 0 & 0 & -30 & -390 \end{array}$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

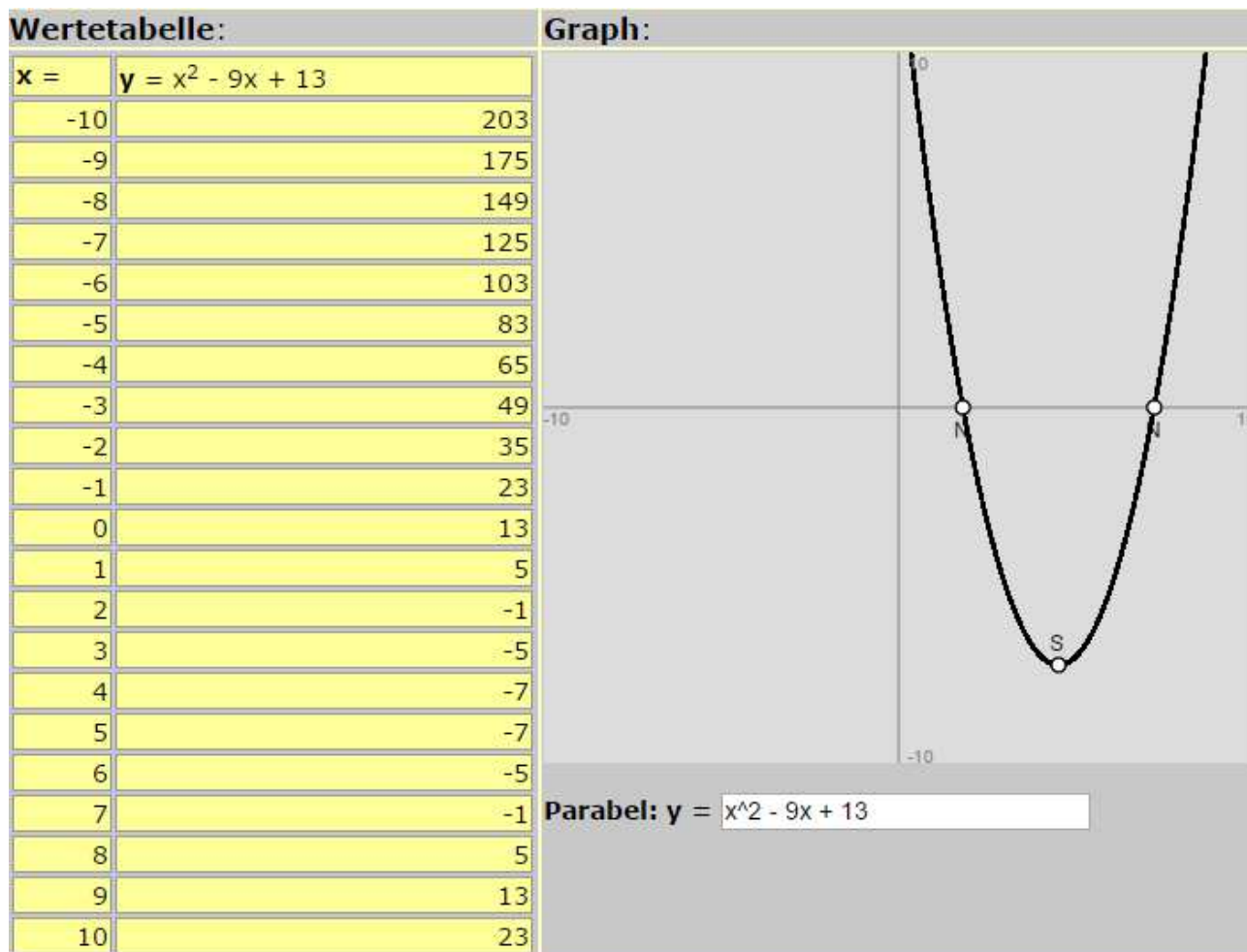
$$\begin{array}{rcl} + 16a & - & 4b + 1c = 65 \\ & + & 20b + 15c = 15 \\ & & - 30c = -390 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{l} c = 13 \\ b = -9 \\ a = 1 \end{array}$$

Mit $a = 1$, $b = -9$ und $c = 13$ erhalten wir die Funktionsgleichung der gesuchten (Normal-) Parabel als: $f(x) = x^2 - 9x + 13$.

V. Wertetabelle, Graph:



www.michael-buhlmann.de / 04.2016 / Aufgabe 234