Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Eine ganz rationale Funktion 4. Grades besitzt einen Sattelpunkt im Ursprung des x-y-Koordinatensystems und verläuft durch den Hochpunkt H(6|216). Wie lautet die Funktionsgleichung?

Lösung: I. <u>Ansatz</u>: f(x) als ganz rationale Funktion 4. Grades besitzt die allgemeine Form:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

mit zu suchenden Koeffizienten a, b, c, d, eε**R**. Wegen der Existenz eines Sattelpunkts S(0|0) als Wendepunkt sowie eines Hochpunkts bei H(6|216) sind noch die 1. und 2. Ableitung von f(x) einzubeziehen. Wir rechnen also:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

(konstante Faktoren bzw. Summanden a, b, c, d, e, Summen- und Potenzregel für das Ableiten).

II. <u>Berechnung</u>: Es gilt auf Grund der Sattelpunkteigenschaft des Punktes S(0|0):

$$f(0) = a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e = e = 0 \quad (1)$$

$$f'(0) = 4a \cdot 0^3 + 3b \cdot 0^2 + 2c \cdot 0 + d = d = 0 \quad (2)$$

$$f''(0) = 12a \cdot 0^2 + 6b \cdot 0 + 2c = 2c = 0 => c = 0 \quad (3)$$

(S als Punkt -> f(0)=0; S als Wendepunkt -> f''(0)=0; S als Sattelpunkt mit waagerechter Tangente -> f'(0)=0). Es gilt damit: e = d = c = 0, so dass die Koeffizienten c, d, e wegfallen und Funktion und 1. Ableitung von der Form $f(x) = ax^4 + bx^3$ bzw. $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2$ sind. Die Hochpunkteigenschaft des Punktes H(6|216) führt weiter auf:

$$f(6) = a \cdot 6^4 + b \cdot 6^3 = 1296a + 216b = 216 \Rightarrow 6a + b = 1 \quad (4)$$

$$f'(6) = 4a \cdot 6^3 + 3b \cdot 6^2 = 864a + 108b = 0 \Rightarrow 8a + b = 0 \quad (5)$$

(H als Punkt -> f(6)=216; H als Hochpunkt -> f'(6)=0). Subtraktion der beiden Gleichungen (4) und (5) ergibt ((5)-(4)):

$$(8a + b) - (6a + b) = 0 - 1 \Rightarrow 8a + b - 6a - b = -1 \Rightarrow 2a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

Einsetzen von $a = -\frac{1}{2}$ etwa in die Gleichung (5) ergibt für den Koeffizienten b:

$$8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + b = 0 \Rightarrow -4 + b = 0 \Rightarrow b = 4$$

Mit $a = -\frac{1}{2}$, b = 4, c = d = e = 0 lautet die gesuchte ganz rationale Funktion: $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 4x^3$.

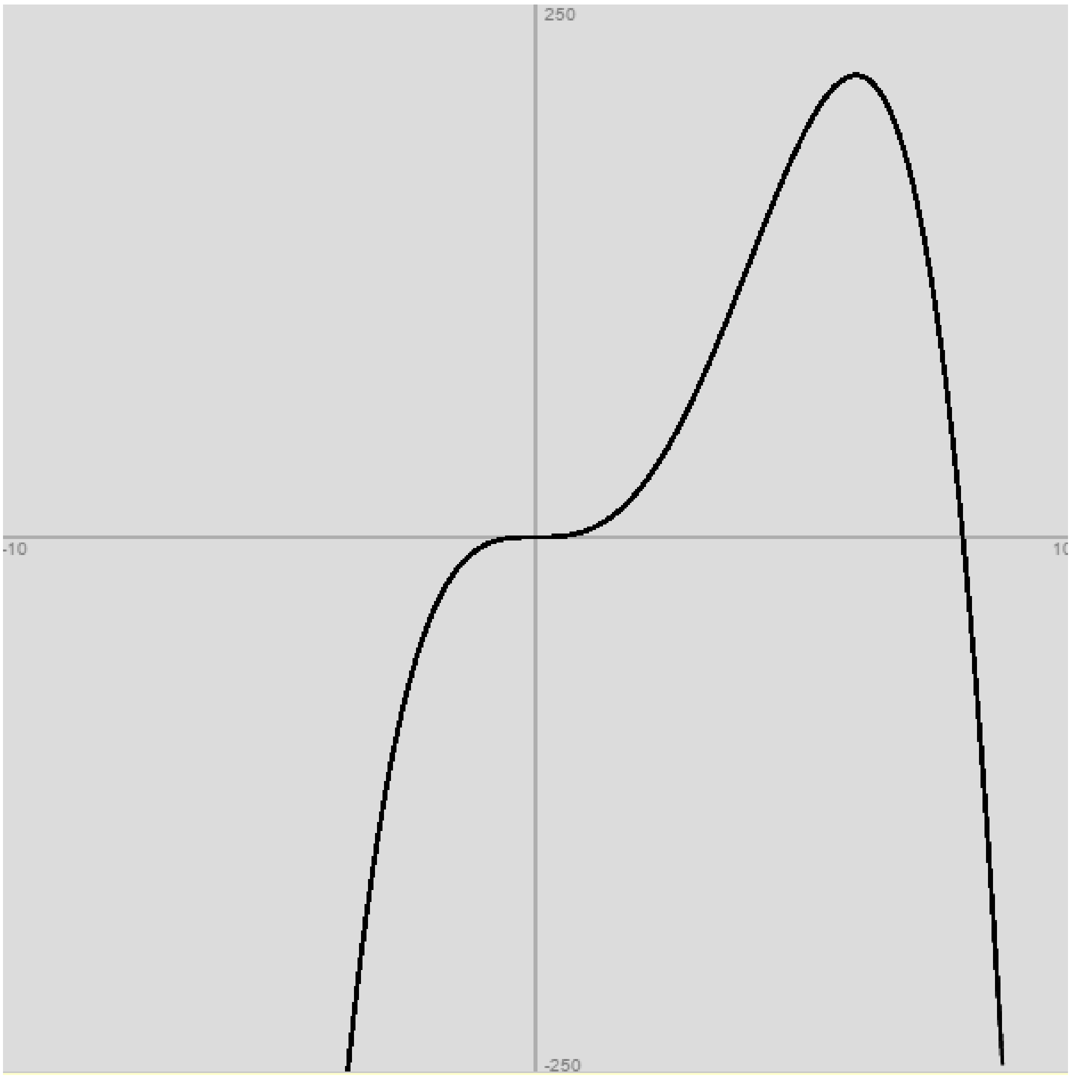
III. Wertetabelle, Graph:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3(x-8) = -\frac{1}{2}x^4 + 4x^3$$

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	0	0	0	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Wendepunkt W(0|0)
4	128	64	0	Wendepunkt W(4|128)
6	216	0	-72	Hochpunkt H(5.99|216)
8	0	-256	-192	Nullstelle N(8|0)

Graph:



www.michael-buhlmann.de / 04.2016 / Aufgabe 236