Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Eine ganz rationale Funktion f(x) 3. Grades besitzt die Nullstellen $N_1(1|0)$ und $N_2(4|0)$ und hat bei E(3|-4) ein Extremum. Wie lautet die Funktionsgleichung? Um welche Art von Extrempunkt handelt es sich?

Lösung: I. <u>Ansatz</u>: f(x) als ganz rationale Funktion 3. Grades besitzt die allgemeine Form:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

mit zu suchenden Koeffizienten a, b, c, dε**R**. Wegen der Existenz eines Extremums E(3|-4) ist noch die 1. Ableitung von f(x) einzubeziehen. Wir rechnen also:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

(konstante Faktoren bzw. Summanden a, b, c, d, Summen- und Potenzregel für das Ableiten).

II. <u>Aufstellen des linearen Gleichungssystems</u>: Es gilt auf Grund der Nullstellen $N_1(1|0)$ und $N_2(4|0)$ und der Extremumeigenschaft des Punktes E(3|-4):

$$f(1) = a\cdot 1^3 + b\cdot 1^2 + c\cdot 1 + d = 0 \quad (1)$$

$$f(4) = a\cdot 4^3 + b\cdot 4^2 + c\cdot 4 + d = 0 \quad (2)$$

$$f(3) = a\cdot 3^3 + b\cdot 3^2 + c\cdot 3 + d = -4 \quad (3)$$

$$f'(3) = 3a\cdot 3^2 + 2b\cdot 3 + c = 0 \quad (4)$$

(N_1 als Nullstelle -> f(1)=0; N_2 als Nullstelle -> f(4)=0; E als Punkt -> f(3)=-4; E als Extremum -> f‘(3)=0). Wir erhalten damit das lineare Gleichungssystem mit den Variablen a, b, c, d:

$$a + b + c + d = 0 \quad (1)$$
$$64a + 16b + 4c + d = 0 \quad (2)$$
$$27a + 9b + 3c + d = -4 \quad (3)$$
$$27a + 6b + c = 0 \quad (4).$$

III. Bestimmung der Koeffizienten der ganz rationalen Funktion: Wir haben das lineare Gleichungssystem wie folgt mit dem Gaußschen Algorithmus zu lösen:

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} + & 1a & + & 1b & + & 1c & + & 1d & = & 0 \\ + & 64a & + & 16b & + & 4c & + & 1d & = & 0 \\ + & 27a & + & 9b & + & 3c & + & 1d & = & -4 \\ + & 27a & + & 6b & + & 1c & & & = & 0 \end{array}$$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 64 & 16 & 4 & 1 & 0 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & -4 \\ 27 & 6 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

1. Schritt: 1*(*2*) - 64*(*1*) / 1*(*3*) - 27*(*1*) / 1*(*4*) - 27*(*1*) /

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -48 & -60 & -63 & 0 \\ 0 & -18 & -24 & -26 & -4 \\ 0 & -21 & -26 & -27 & 0 \end{array}$$

2. Schritt: -8*(*3*) + 3*(*2*) / -16*(*4*) + 7*(*2*) /

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -48 & -60 & -63 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 19 & 32 \\ 0 & 0 & -4 & -9 & 0 \end{array}$$

3. Schritt: 3*(*4*) + 1*(*3*) /

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -48 & -60 & -63 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 19 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 32 \end{array}$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr} + & 1a & + & 1b & + & 1c & + & 1d & = & 0 \\ & & - & 48b & - & 60c & - & 63d & = & 0 \\ & & & & + & 12c & + & 19d & = & 32 \\ & & & & & & - & 8d & = & 32 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$d = -4$
$c = 9$
$b = -6$
$a = 1$

Mit den Koeffizienten a = 1, b = -6, c = 9, d = -4 erhalten wir die Gleichung der gesuchten ganz rationalen Funktion: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$.

IV. Es bleibt noch nachzuweisen, dass beim Punkt E(3|-4) ein Tiefpunkt vorliegt. Auf Grund von $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$, $f''(x) = 6x - 12$ gilt:

$f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + 9 = 0$, $f''(3) = 6 \cdot 3 - 12 = 6 > 0$,

so dass die Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ tatsächlich einen Tiefpunkt bei E(3|-4) besitzt.

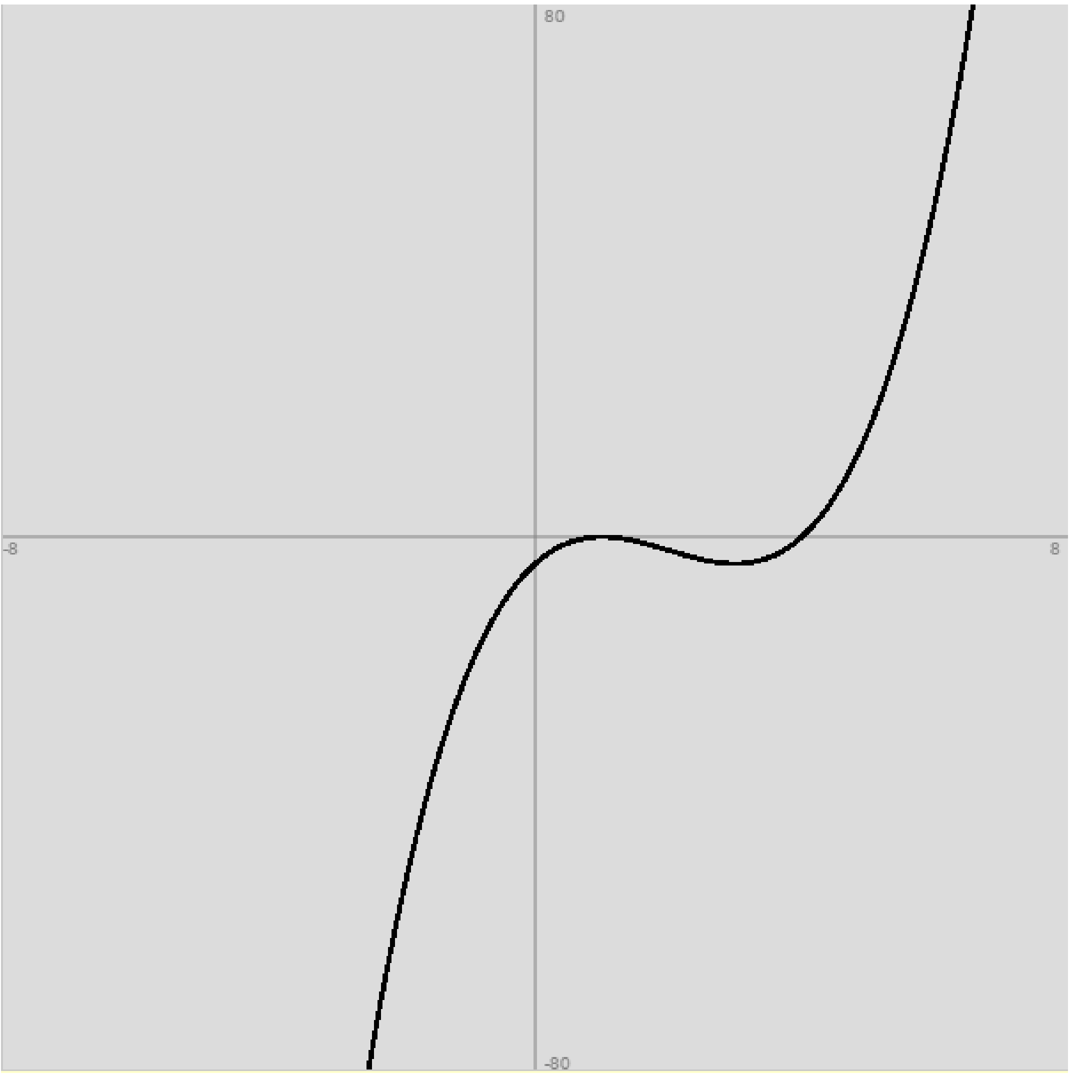
V. Wertetabelle, Graph:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$$

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	-4	9	-12	6	Schnittpunkt $S_y(0\|-4)$
1	0	0	-6	6	Nullstelle N(1|0) = Hochpunkt H(1|0)
2	-2	-3	0	6	Wendepunkt W(2|-2)
3	-4	0	6	6	Tiefpunkt T(3|-4)
4	0	9	12	6	Nullstelle N(4|0)

Graph:



www.michael-buhlmann.de / 04.2016 / Aufgabe 237