

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Eine ganz rationale Funktion $f(x)$ 3. Grades besitzt die Nullstellen $N_1(1|0)$ und $N_2(4|0)$ und hat bei $E(3|-4)$ ein Extremum. Wie lautet die Funktionsgleichung? Um welche Art von Extrempunkt handelt es sich?

Lösung: I. Ansatz: $f(x)$ als ganz rationale Funktion 3. Grades besitzt die allgemeine Form:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

mit zu suchenden Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Wegen der Existenz eines Extremums $E(3|-4)$ ist noch die 1. Ableitung von $f(x)$ einzubeziehen. Wir rechnen also:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

(konstante Faktoren bzw. Summanden a, b, c, d , Summen- und Potenzregel für das Ableiten).

II. Aufstellen des linearen Gleichungssystems: Es gilt auf Grund der Nullstellen $N_1(1|0)$ und $N_2(4|0)$ und der Extremumeigenschaft des Punktes $E(3|-4)$:

$$f(1) = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 0 \quad (1)$$

$$f(4) = a \cdot 4^3 + b \cdot 4^2 + c \cdot 4 + d = 0 \quad (2)$$

$$f(3) = a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d = -4 \quad (3)$$

$$f'(3) = 3a \cdot 3^2 + 2b \cdot 3 + c = 0 \quad (4)$$

(N_1 als Nullstelle $\rightarrow f(1)=0$; N_2 als Nullstelle $\rightarrow f(4)=0$; E als Punkt $\rightarrow f(3)=-4$; E als Extremum $\rightarrow f'(3)=0$). Wir erhalten damit das lineare Gleichungssystem mit den Variablen a, b, c, d :

$$a + b + c + d = 0 \quad (1)$$

$$64a + 16b + 4c + d = 0 \quad (2)$$

$$27a + 9b + 3c + d = -4 \quad (3)$$

$$27a + 6b + c = 0 \quad (4).$$

III. Bestimmung der Koeffizienten der ganz rationalen Funktion: Wir haben das lineare Gleichungssystem wie folgt mit dem Gaußschen Algorithmus zu lösen:

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}+ 1a + 1b + 1c + 1d &= 0 \\+ 64a + 16b + 4c + 1d &= 0 \\+ 27a + 9b + 3c + 1d &= -4 \\+ 27a + 6b + 1c &= 0\end{aligned}$$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\64 & 16 & 4 & 1 & 0 \\27 & 9 & 3 & 1 & -4 \\27 & 6 & 1 & 0 & 0\end{array}$$

1. Schritt: $1 \cdot (2) - 64 \cdot (1) / 1 \cdot (3) - 27 \cdot (1) / 1 \cdot (4) - 27 \cdot (1) /$

$$\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\0 & -48 & -60 & -63 & 0 \\0 & -18 & -24 & -26 & -4 \\0 & -21 & -26 & -27 & 0\end{array}$$

2. Schritt: $-8 \cdot (3) + 3 \cdot (2) / -16 \cdot (4) + 7 \cdot (2) /$

$$\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\0 & -48 & -60 & -63 & 0 \\0 & 0 & 12 & 19 & 32 \\0 & 0 & -4 & -9 & 0\end{array}$$

3. Schritt: $3 \cdot (4) + 1 \cdot (3) /$

$$\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\0 & -48 & -60 & -63 & 0 \\0 & 0 & 12 & 19 & 32 \\0 & 0 & 0 & -8 & 32\end{array}$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned}+ 1a + 1b + 1c + 1d &= 0 \\- 48b - 60c - 63d &= 0 \\+ 12c + 19d &= 32 \\- 8d &= 32\end{aligned}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned}d &= -4 \\c &= 9 \\b &= -6 \\a &= 1\end{aligned}$$

Mit den Koeffizienten $a = 1$, $b = -6$, $c = 9$, $d = -4$ erhalten wir die Gleichung der gesuchten ganz rationalen Funktion: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$.

IV. Es bleibt noch nachzuweisen, dass beim Punkt $E(3|-4)$ ein Tiefpunkt vorliegt. Auf Grund von $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$, $f''(x) = 6x - 12$ gilt:

$$f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + 9 = 0, \quad f''(3) = 6 \cdot 3 - 12 = 6 > 0,$$

so dass die Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ tatsächlich einen Tiefpunkt bei $E(3|-4)$ besitzt.

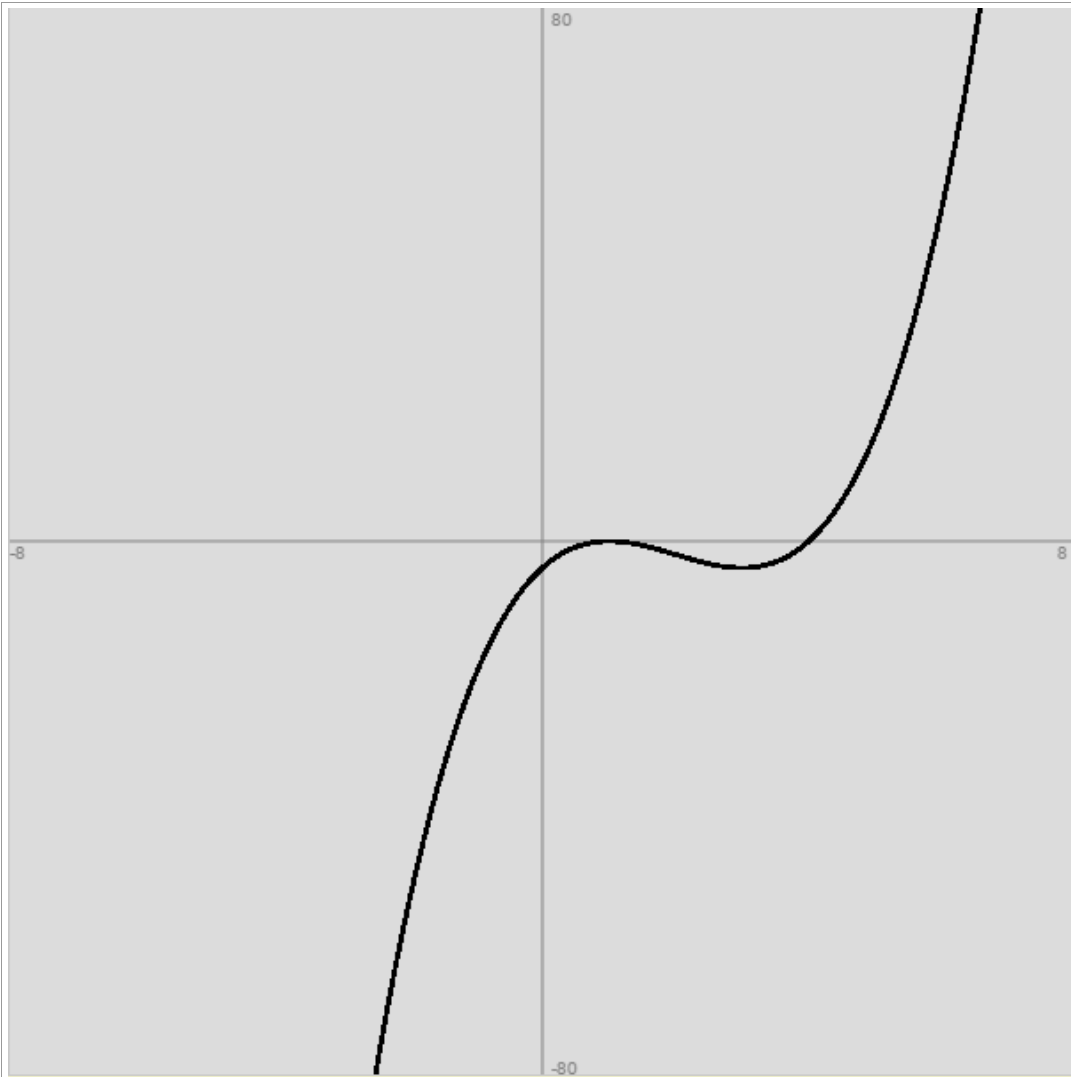
V. Wertetabelle, Graph:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$$

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	-4	9	-12	6	Schnittpunkt $S_y(0 -4)$
1	0	0	-6	6	Nullstelle $N(1 0)$ = Hochpunkt $H(1 0)$
2	-2	-3	0	6	Wendepunkt $W(2 -2)$
3	-4	0	6	6	Tiefpunkt $T(3 -4)$
4	0	9	12	6	Nullstelle $N(4 0)$

Graph:



www.michael-buhlmann.de / 04.2016 / Aufgabe 237