

# Mathematikaufgaben

## > Analysis

### > Bestimmungsaufgabe

---

**Aufgabe:** Eine ganz rationale Funktion  $f(x)$  4. Grades ist achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse, besitzt einen Tiefpunkt bei  $T(2|-25)$  und hat eine Nullstelle bei  $x = 3$ . Wie lautet die Funktionsgleichung?

**Lösung:** I. Ansatz:  $f(x)$  als ganz rationale Funktion 4. Grades besitzt die allgemeine Form:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

mit zu suchenden Koeffizienten  $a, b, c, d, e \in \mathbf{R}$ . Wegen der Achsensymmetrie um die  $y$ -Achse fallen alle Potenzen mit ungerader Hochzahl heraus. Der Ansatz lautet nun:

$$f(x) = ax^4 + cx^2 + e$$

mit zu bestimmenden Koeffizienten  $a, c, e \in \mathbf{R}$ . Wegen der Existenz eines Tiefpunkts  $T(2|-25)$  ist noch die 1. Ableitung von  $f(x)$  einzubeziehen. Wir rechnen also:

$$f(x) = ax^4 + cx^2 + e$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 2cx$$

(konstante Faktoren bzw. Summanden  $a, c, e$ , Summen- und Potenzregel für das Ableiten).

II. Aufstellen des linearen Gleichungssystems: Es gilt auf Grund der Nullstelle  $N(3|0)$  und der Tiefpunkteigenschaft des Punktes  $T(2|-25)$ :

$$f(3) = a \cdot 3^4 + c \cdot 3^2 + e = 0 \quad (1)$$

$$f(2) = a \cdot 2^4 + c \cdot 2^2 + e = -25 \quad (2)$$

$$f'(2) = 4a \cdot 2^3 + 2c \cdot 2 = 0 \quad (3)$$

( $N$  als Nullstelle  $\rightarrow f(3)=0$ ;  $T$  als Punkt  $\rightarrow f(2)=-25$ ;  $T$  als Tiefpunkt  $\rightarrow f'(2)=0$ ). Wir erhalten damit das lineare Gleichungssystem mit den Variablen  $a, c, e$ :

$$81a + 9c + e = 0 \quad (1)$$

$$16a + 4c + e = -25 \quad (2)$$

$$32a + 4c = 0 \quad (3)$$

III. Bestimmung der Koeffizienten der ganz rationalen Funktion: Wir haben das lineare Gleichungssystem wie folgt mit dem Gaußschen Algorithmus zu lösen:

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} + 81a + 9c + 1e &= 0 \\ + 16a + 4c + 1e &= -25 \\ + 32a + 4c &= 0 \end{aligned}$$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{ccc|c} 81 & 9 & 1 & 0 \\ 16 & 4 & 1 & -25 \\ 32 & 4 & 0 & 0 \end{array}$$

1. Schritt:  $81 \cdot (2) - 16 \cdot (1) / 81 \cdot (3) - 32 \cdot (1) /$

$$\begin{array}{ccc|c} 81 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 180 & 65 & -2025 \\ 0 & 36 & -32 & 0 \end{array}$$

2. Schritt:  $5 \cdot (3) - 1 \cdot (2) /$

$$\begin{array}{ccc|c} 81 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 180 & 65 & -2025 \\ 0 & 0 & -225 & 2025 \end{array}$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} + 81a + 9c + 1e &= 0 \\ + 180c + 65e &= -2025 \\ - 225e &= 2025 \end{aligned}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} e &= -9 \\ c &= -8 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

Mit den Koeffizienten  $a = 1$ ,  $c = -8$ ,  $e = -9$  erhalten wir die Gleichung der gesuchten ganz rationalen Funktion:  $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ .

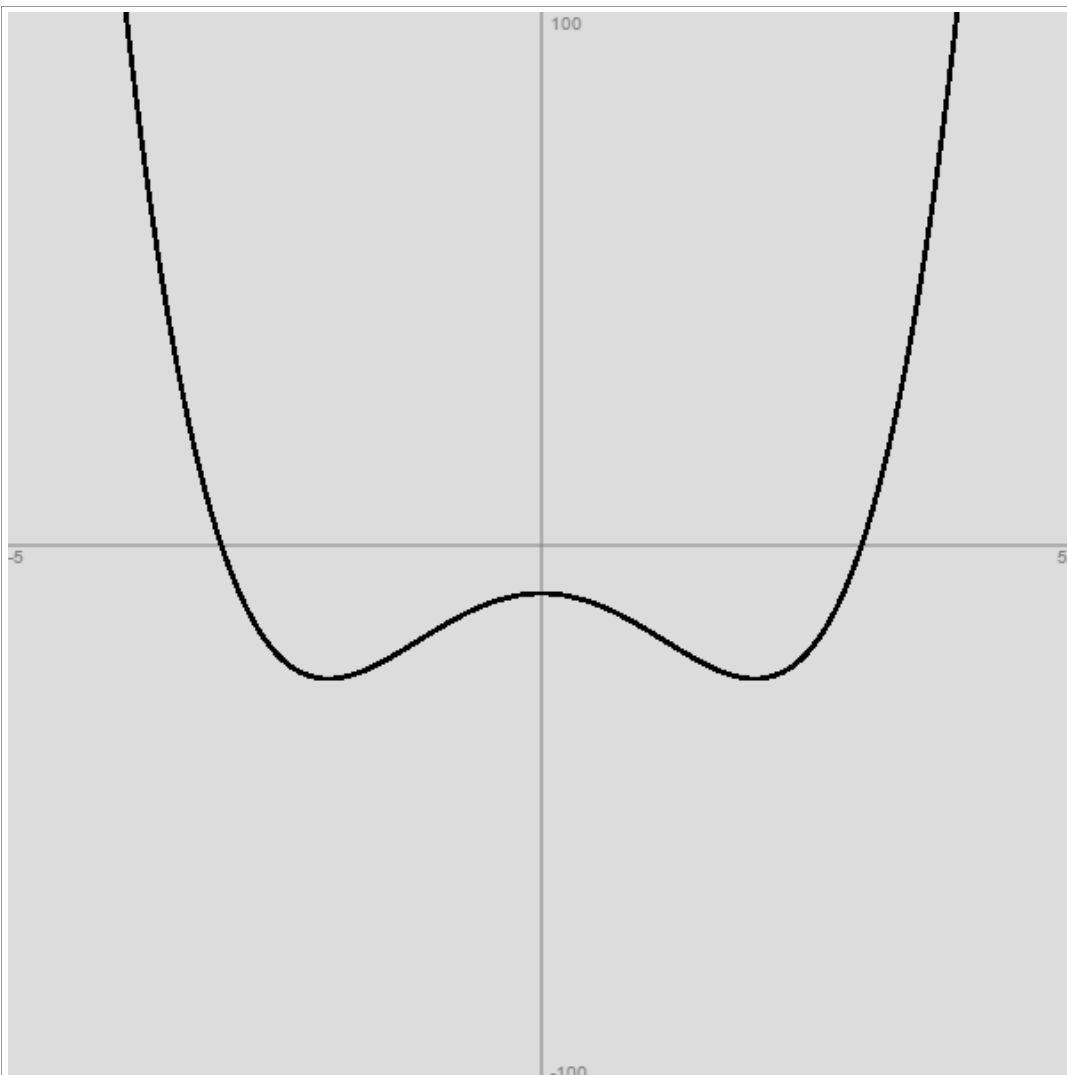
IV. Wertetabelle, Graph:

$$f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$$

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-3	0	-60	92	-72	Nullstelle N(-3 0)
-2	-25	0	32	-48	Tiefpunkt T(-2 -25)
-1.15	-17.831	12.3165	0	-27.6	Wendepunkt W(-1.15 -17.83)
0	-9	0	-16	0	Schnittpunkt S <sub>y</sub> (0 -9) = Hochpunkt H(0 -9)
1.16	-17.9542	-12.3164	0	27.84	Wendepunkt W(1.16 -17.95)
2	-25	0	32	48	Tiefpunkt T(2 -25)
3	0	60	92	72	Nullstelle N(3 0)

Graph:



www.michael-buhlmann.de / 04.2016 / Aufgabe 238