Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Eine ganz rationale Funktion f(x) 4. Grades ist achsensymmetrisch zur y-Achse, besitzt einen Tiefpunkt bei T(2|-25) und hat eine Nullstelle bei x = 3. Wie lautet die Funktionsgleichung?

Lösung: I. Ansatz: f(x) als ganz rationale Funktion 4. Grades besitzt die allgemeine Form:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

mit zu suchenden Koeffizienten a, b, c, d, eε**R**. Wegen der Achsensymmetrie um die y-Achse fallen alle Potenzen mit ungerader Hochzahl heraus. Der Ansatz lautet nun:

$$f(x) = ax^4 + cx^2 + e$$

mit zu bestimmenden Koeffizienten a, c, eε**R**. Wegen der Existenz eines Tiefpunkts T(2|-25) ist noch die 1. Ableitung von f(x) einzubeziehen. Wir rechnen also:

$$f(x) = ax^4 + cx^2 + e$$
$$f'(x) = 4ax^3 + 2cx$$

(konstante Faktoren bzw. Summanden a, c, e, Summen- und Potenzregel für das Ableiten).

II. Aufstellen des linearen Gleichungssystems: Es gilt auf Grund der Nullstelle N(3|0) und der Tiefpunkteigenschaft des Punktes T(2|-25):

$$f(3) = a \cdot 3^4 + c \cdot 3^2 + e = 0 \ \text{(1)}$$
$$f(2) = a \cdot 2^4 + c \cdot 2^2 + e = -25 \ \text{(2)}$$
$$f'(2) = 4a \cdot 2^3 + 2c \cdot 4 = 0 \ \text{(3)}$$

(N als Nullstelle -> f(3)=0; T als Punkt -> f(2)=-25; T als Tiefpunkt -> f‘(2)=0). Wir erhalten damit das lineare Gleichungssystem mit den Variablen a, c, e:

$$81a + 9c + e = 0 \ \text{(1)}$$
$$16a + 4c + e = -25 \ \text{(2)}$$
$$32a + 4c = 0 \ \text{(3)}$$

III. Bestimmung der Koeffizienten der ganz rationalen Funktion: Wir haben das lineare Gleichungssystem wie folgt mit dem Gaußschen Algorithmus zu lösen:

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrl} +\ 81a & +\ 9c & +\ 1e & = & 0 \\ +\ 16a & +\ 4c & +\ 1e & = & -25 \\ +\ 32a & +\ 4c & & = & 0 \end{array}$$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{rrr|r} 81 & 9 & 1 & 0 \\ 16 & 4 & 1 & -25 \\ 32 & 4 & 0 & 0 \end{array}$$

1. Schritt: 81*(*2*) - 16*(*1*) / 81*(*3*) - 32*(*1*) /

$$\begin{array}{rrr|r} 81 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 180 & 65 & -2025 \\ 0 & 36 & -32 & 0 \end{array}$$

2. Schritt: 5*(*3*) - 1*(*2*) /

$$\begin{array}{rrr|r} 81 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 180 & 65 & -2025 \\ 0 & 0 & -225 & 2025 \end{array}$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrl} +\ 81a & +\ 9c & +\ 1e & = & 0 \\ & +\ 180c & +\ 65e & = & -2025 \\ & & -\ 225e & = & 2025 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$e = -9$
$c = -8$
$a = 1$

Mit den Koeffizienten a = 1, c = -8, e = -9 erhalten wir die Gleichung der gesuchten ganz rationalen Funktion: $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$.

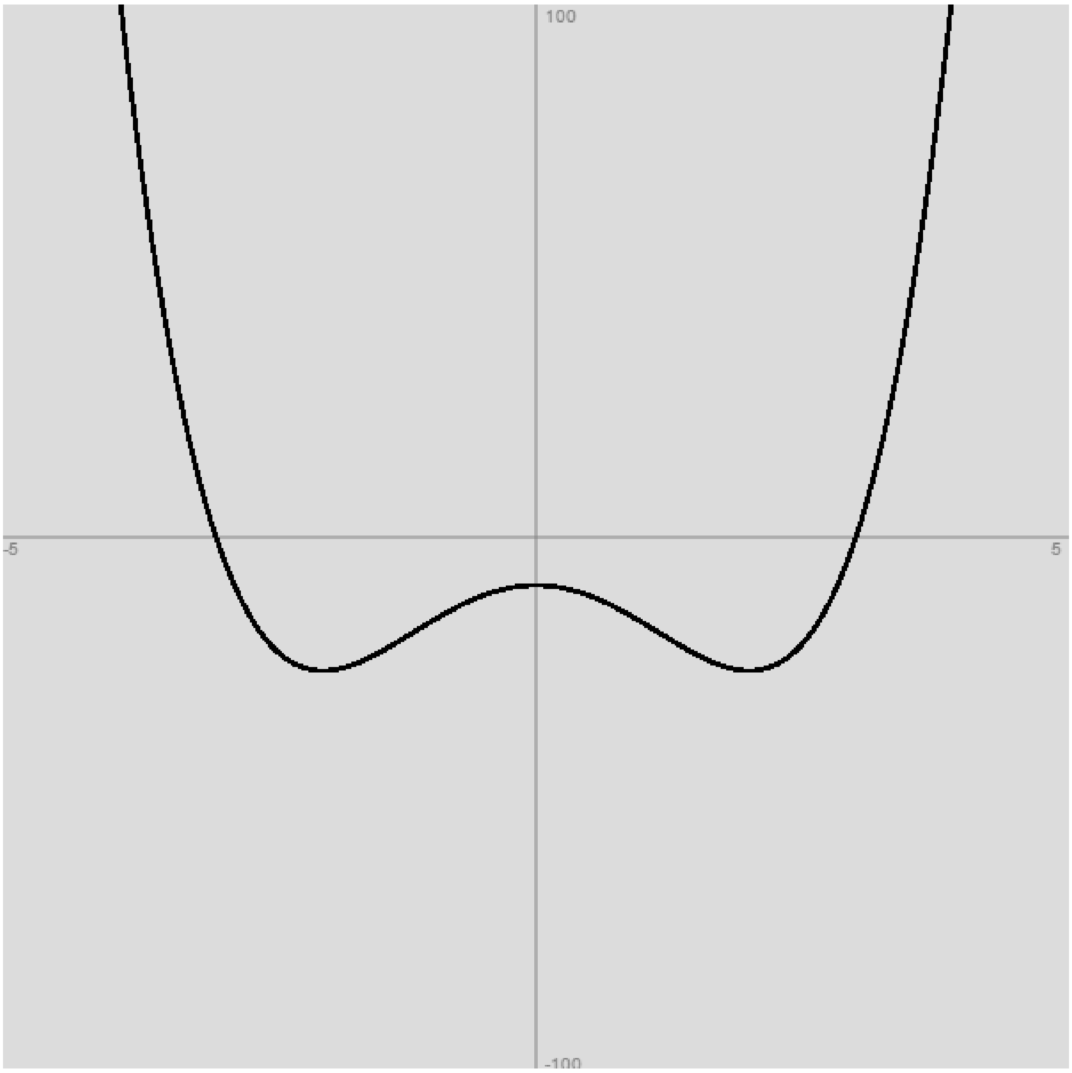
IV. Wertetabelle, Graph:

$$f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$$

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-3	0	-60	92	-72	Nullstelle N(-3|0)
-2	-25	0	32	-48	Tiefpunkt T(-2|-25)
-1.15	-17.831	12.3165	0	-27.6	Wendepunkt W(-1.15|-17.83)
0	-9	0	-16	0	Schnittpunkt S_y(0|-9) = Hochpunkt H(0|-9)
1.16	-17.9542	-12.3164	0	27.84	Wendepunkt W(1.16|-17.95)
2	-25	0	32	48	Tiefpunkt T(2|-25)
3	0	60	92	72	Nullstelle N(3|0)

Graph:



www.michael-buhlmann.de / 04.2016 / Aufgabe 238