Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Eine ganz rationale Funktion 4. Grades ist von der Form

$$f(x) = ax^3(x+b)^2$$

und verläuft durch die Punkte P(-2|-8) und Q(4|400). Wie lautet die Funktionsgleichung?

Lösung: I. Ansatz: f(x) als ganz rationale Funktion 4. Grades besitzt die vorgegebene Produktform:

$$f(x) = ax^3(x+b)^2$$

mit zu suchenden Koeffizienten a, bε**R** und einer dreifachen Nullstelle $N_1(0|0)$ sowie einer doppelten Nullstelle $N_2(-b|0)$.

II. Berechnung: Punktprobe der Punkte P(-2|-8) und Q(4|400) führt auf:

$$f(-2) = a \cdot (-2)^3(-2+b)^2 = -8a(-2+b)^2 = -8 \quad (1)$$

$$f(4) = a \cdot 4^3(4+b)^2 = 64a(4+b)^2 = 400 \quad (2).$$

Division der beiden Gleichungen (1) und (2) ergibt mit (2):(1):

$$\frac{64a(4+b)^2}{-8a(-2+b)^2} = \frac{400}{-8} \Leftrightarrow -8 \cdot \frac{(4+b)^2}{(-2+b)^2} = -50 \Leftrightarrow \frac{(4+b)^2}{(-2+b)^2} = 6{,}25 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{4+b}{-2+b}\right)^2 = 6{,}25 \Leftrightarrow \frac{4+b}{-2+b} = \pm 2{,}5$$

1. Fall: Wir betrachten die Gleichung $\frac{4+b}{-2+b} = 2{,}5$ und erhalten:

$$\frac{4+b}{-2+b} = 2{,}5 \Leftrightarrow 4+b = 2{,}5(-2+b) \Leftrightarrow 4+b = -5+2{,}5b \Leftrightarrow 4 = -5+1{,}5b \Leftrightarrow 9 = 1{,}5b \Leftrightarrow b = 6$$

und weiter durch Einsetzen von b = 6 in Gleichung (1):

$$-8a(-2+6)^2 = -8 \Rightarrow a \cdot 4^2 = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{16}.$$

Die gesuchte ganz rationale Funktion lautet in diesem Fall: $f(x) = \frac{1}{16}x^3(x+6)^2$. Es gibt aber noch eine weitere Funktion f(x), die die vorausgesetzten Eigenschaften erfüllt.

2. Fall: Wir betrachten die Gleichung $\frac{4+b}{-2+b} = -2{,}5$ und erhalten:

$$\frac{4+b}{-2+b} = -2{,}5 \Leftrightarrow 4+b = -2{,}5(-2+b) \Leftrightarrow 4+b = 5-2{,}5b \Leftrightarrow 4+3{,}5b = 5 \Leftrightarrow 3{,}5b = 1 \Leftrightarrow b = \frac{2}{7}$$

und weiter durch Einsetzen von $b = \frac{2}{7}$ in Gleichung (1):

$$-8a(-2+\frac{2}{7})^2 = -8 \Rightarrow a \cdot \left(-\frac{12}{7}\right)^2 = 1 \Rightarrow a = \frac{49}{144}.$$

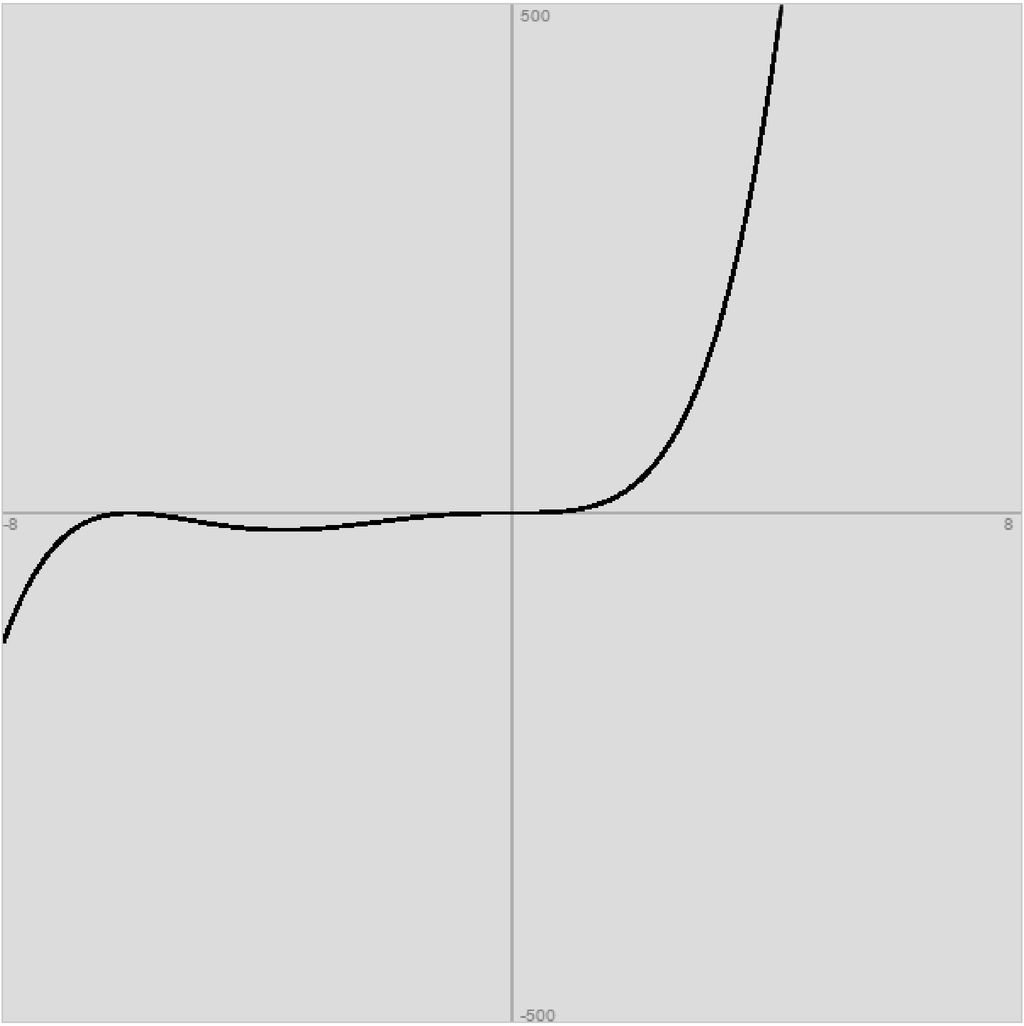
Die gesuchte ganz rationale Funktion lautet in diesem Fall: $f(x) = \frac{49}{144}x^3\left(x+\frac{2}{7}\right)^2$.

III. Wertetabelle, Graph:

$$f(x)=\frac{1}{16}x^3(x+6)^2$$

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-6	0	0	-27	Nullstelle N(-6|0) = Hochpunkt H(-6|0)
-5.07	-7.0448	-10.98	0	Wendepunkt W(-5.07|-7.04)
-3.6	-16.7962	0	9.72	Tiefpunkt T(-3.6|-16.8)
-2.14	-9.1263	8.07	0	Wendepunkt W(-2.14|-9.13)
0	0	0	0	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Sattelpunkt W(0|0)

Graph:

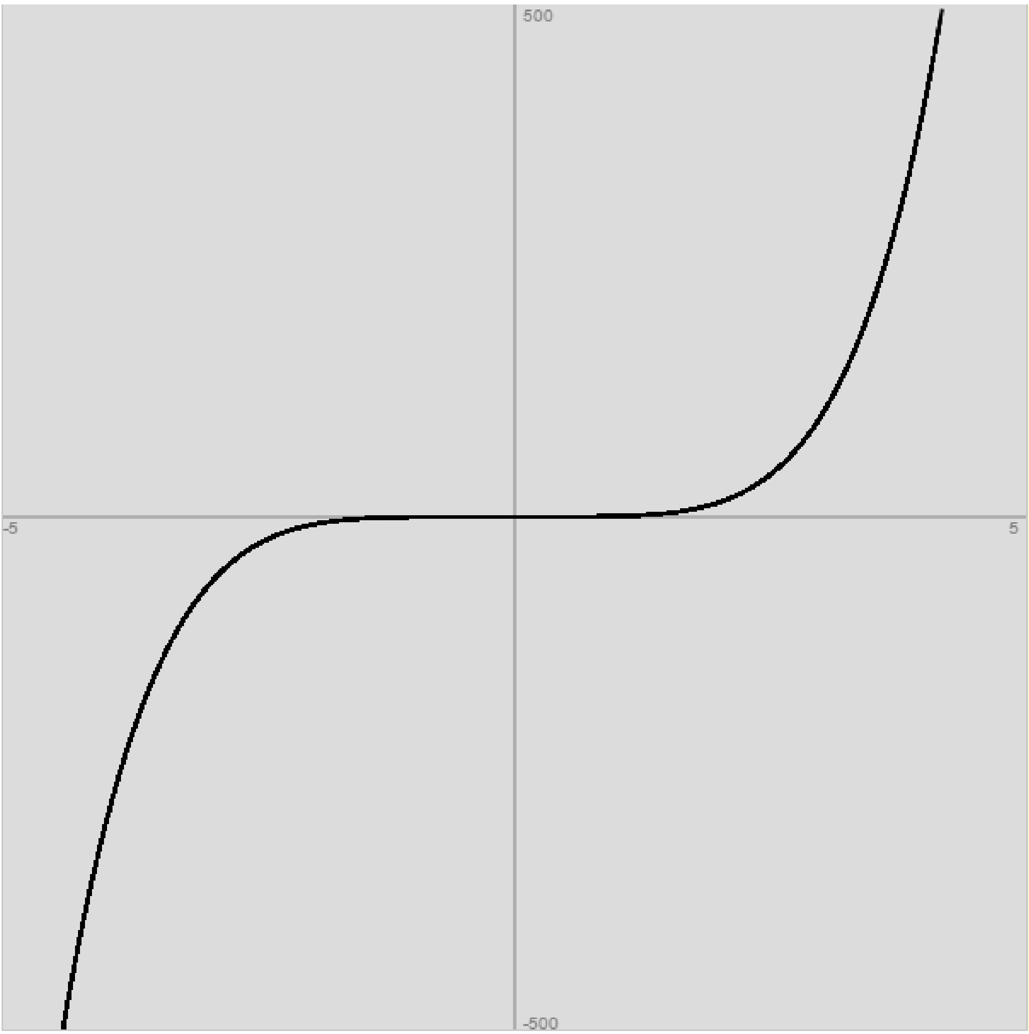


$$f(x) = \frac{49}{144}x^3\left(x + \frac{2}{7}\right)^2$$

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-0.29	0	0	-0.01	Hochpunkt H(-0.29|0)
-0.25	(0)	(0)	0	Wendepunkt W(-0.25|0)
-0.18	(0)	0	0.01	Tiefpunkt T(-0.18|0)
0	0	0	0	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Sattelpunkt W(0|0)

Graph:



www.michael-buhlmann.de / 04.2016 / Aufgabe 239