

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Eine allgemeine Parabel 2. Grades besitzt den Hochpunkt $H(2|5)$ und verläuft durch den Punkt $P(3|2)$. Wie lautet die Funktionsgleichung?

1. Lösung: I. Ansatz: $f(x)$ als ganz rationale Funktion 2. Grades (Parabel) lässt sich darstellen als:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

mit zu suchenden Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{R}$ (Normalform der Parabelgleichung). Am Scheitelpunkt der Parabel (Hochpunkt, Tiefpunkt) besitzt die Funktion eine waagerechte Tangente, so dass bei der Funktionsbestimmung auch die 1. Ableitung von $f(x)$:

$$f'(x) = 2ax + b$$

zum Tragen kommt.

II. Berechnung: Es gilt durch Punktprobe mit dem Punkt $P(3|2)$ im Ansatz $f(x) = ax^2 + bx + c$:

$$f(3) = 2$$

und:

$$f(3) = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c,$$

so dass die Identität:

$$f(3) = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 2$$

folgt. Entsprechend ergibt sich für den Hochpunkt $H(2|5)$ auf der Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$:

$$f(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 5.$$

Da $H(2|5)$ auch ein Hochpunkt ist, verwenden wir den Ansatz für die 1. Ableitung $f'(x) = 2ax + b$ und setzen ein:

$$f'(2) = 2a \cdot 2 + b = 0,$$

da bei Funktionsextrema die 1. Ableitung null werden muss.

III. Aufstellen des Gleichungssystems für die Koeffizienten der Parabel: Es ergibt sich damit das folgende lineare Gleichungssystem mit den Unbekannten a, b und c:

$$9a + 3b + c = 2$$

$$4a + 2b + c = 5$$

$$4a + b = 0$$

Wir stellen das Gleichungssystem zur einfacheren Berechnung noch um, indem wir die erste mit der dritten Gleichung vertauschen:

$$4a + b = 0$$

$$4a + 2b + c = 5$$

$$9a + 3b + c = 2$$

IV. Bestimmung der Koeffizienten der Parabel: Wir haben das lineare Gleichungssystem wie folgt mit dem Gaußschen Algorithmus zu lösen:

Lineares Gleichungssystem:

$$+ 4a + 1b = 0$$

$$+ 4a + 2b + 1c = 5$$

$$+ 9a + 3b + 1c = 2$$

Anfangstableau:

$$4 \ 1 \ 0 \ | \ 0$$

$$4 \ 2 \ 1 \ | \ 5$$

$$9 \ 3 \ 1 \ | \ 2$$

1. Schritt: $1 \cdot (2) - 1 \cdot (1) / 4 \cdot (3) - 9 \cdot (1) /$

$$4 \ 1 \ 0 \ | \ 0$$

$$0 \ 1 \ 1 \ | \ 5$$

$$0 \ 3 \ 4 \ | \ 8$$

2. Schritt: $1 \cdot (3) - 3 \cdot (2) /$

$$4 \ 1 \ 0 \ | \ 0$$

$$0 \ 1 \ 1 \ | \ 5$$

$$0 \ 0 \ 1 \ | \ -7$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$+ 4a + 1b = 0$$

$$+ 1b + 1c = 5$$

$$+ 1c = -7$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

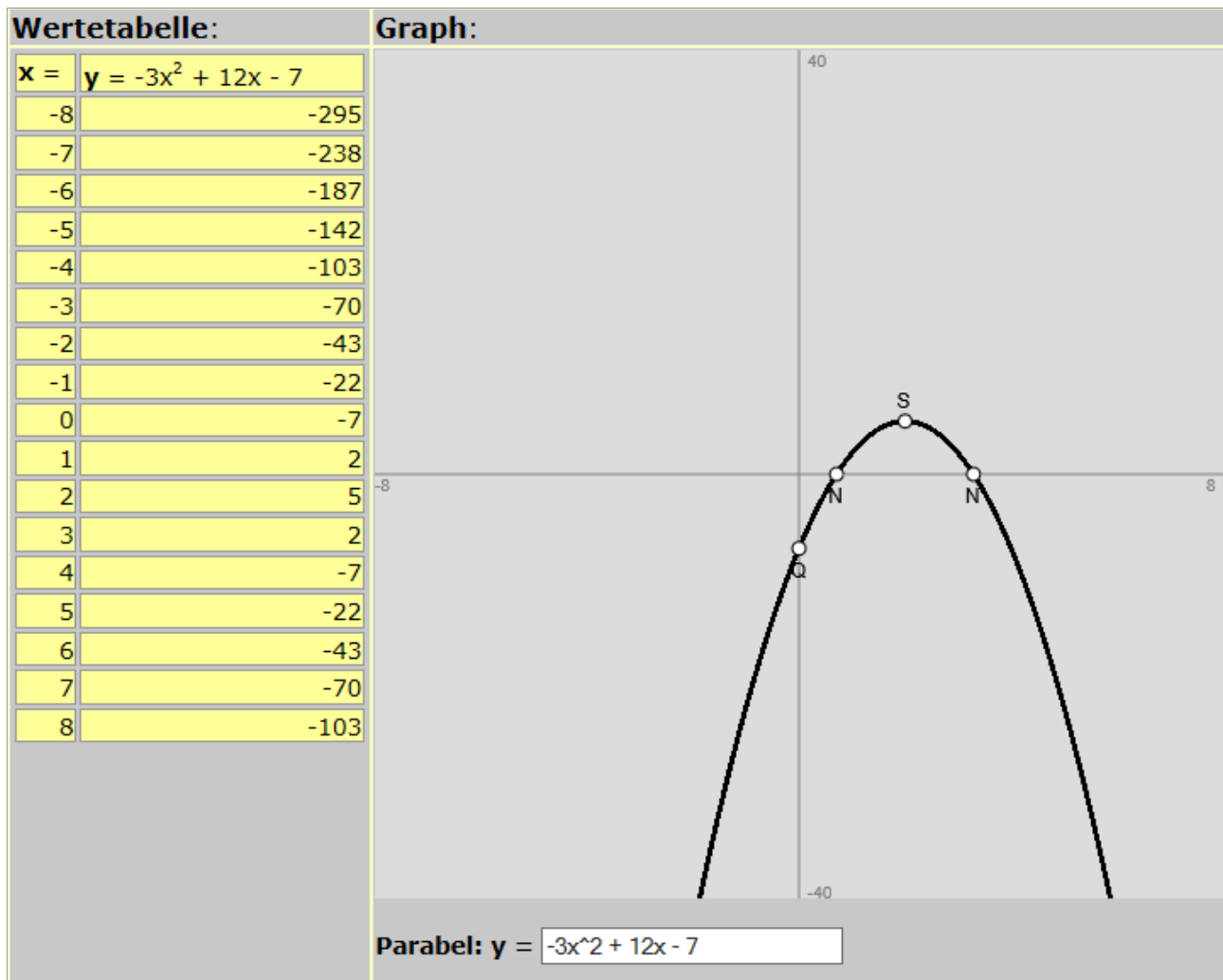
$$c = -7$$

$$b = 12$$

$$a = -3$$

Mit $a = -3$, $b = 12$ und $c = -7$ erhalten wir die Funktionsgleichung der gesuchten allgemeinen Parabel als: $f(x) = -3x^2 + 12x - 7$.

V. Wertetabelle, Graph:



2. Lösung: I. Ansatz: $f(x)$ als ganz rationale Funktion 2. Grades (Parabel) lässt sich darstellen als:

$$f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$$

mit zu suchendem Koeffizienten $a \in \mathbf{R}$ und Scheitelpunkt $S(x_s|y_s)$ (Scheitelform der Parabelgleichung). Den Scheitelpunkt der Parabel können wir dann mit dem Hochpunkt der Aufgabenstellung identifizieren.

II. Berechnung: Es gilt mit dem Hochpunkt $H(2|5)$ als Scheitelpunkt die Darstellung des Parabelterms:

$$f(x) = a(x - 2)^2 + 5,$$

so dass nur noch der Koeffizient a zu bestimmen ist. Letzteres geschieht durch Punktprobe mit dem Parabelpunkt $P(3|2)$ in der Identität $f(x) = a(x - 2)^2 + 5$, womit sich ergibt:

$$f(3) = a(3 - 2)^2 + 5 = a \cdot 1^2 + 5 = a + 5 = 2,$$

also:

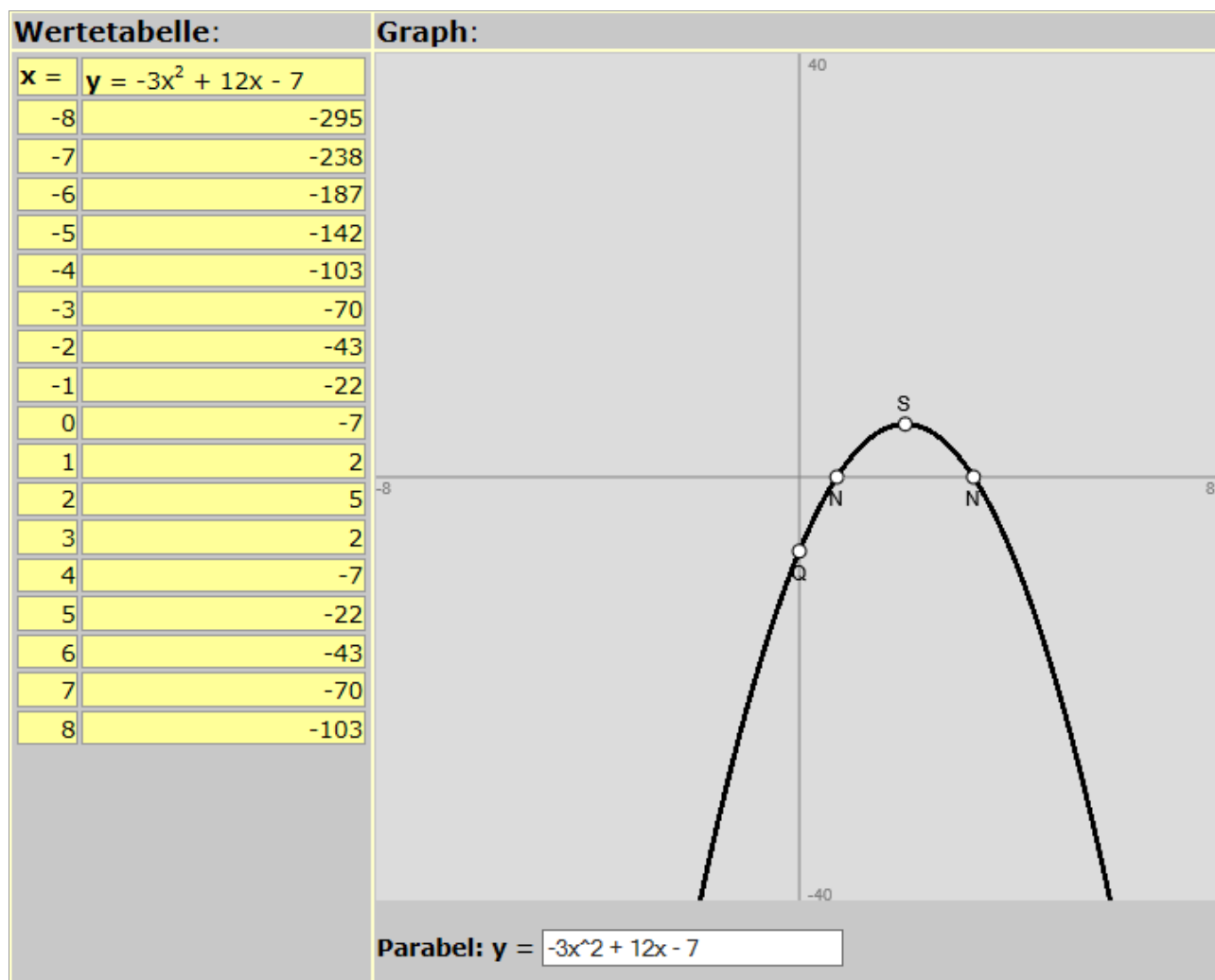
$$a + 5 = 2 \Rightarrow a = -3.$$

Die Parabelgleichung lautet insgesamt: $f(x) = -3(x - 2)^2 + 5$ in der Scheitelform und lässt sich

mit Hilfe der 2. binomischen Formel in die Normalform umwandeln:

$$f(x) = -3(x-2)^2 + 5 = -3(x^2 - 4x + 4) + 5 = -3x^2 + 12x - 12 + 5 = -3x^2 + 12x - 7.$$

III. Wertetabelle, Graph:



www.michael-buhlmann.de / 02.2017 / Aufgabe 313