Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Eine allgemeine Parabel 2. Grades besitzt den Hochpunkt H(2|5) und verläuft durch den Punkt P(3|2). Wie lautet die Funktionsgleichung?

1. Lösung: I. Ansatz: f(x) als ganz rationale Funktion 2. Grades (Parabel) lässt sich darstellen als:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

mit zu suchenden Koeffizienten a, b, cε**R** (Normalform der Parabelgleichung). Am Scheitelpunkt der Parabel (Hochpunkt, Tiefpunkt) besitzt die Funktion eine waagerechte Tangente, so dass bei der Funktionsbestimmung auch die 1. Ableitung von f(x):

$$f'(x) = 2ax + b$$

zum Tragen kommt.

II. Berechnung: Es gilt durch Punktprobe mit dem Punkt P(3|2) im Ansatz $f(x) = ax^2 + bx + c$:

$$f(3) = 2$$

und:

$$f(3) = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \,,$$

so dass die Identität:

$$f(3) = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 2$$

folgt. Entsprechend ergibt sich für den Hochpunkt H(2|5) auf der Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$:

$f(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 5$.

Da H(2|5) auch ein Hochpunkt ist, verwenden wir den Ansatz für die 1. Ableitung $f'(x) = 2ax + b$ und setzen ein:

$f'(2) = 2a \cdot 2 + b = 0$,

da bei Funktionsextrema die 1. Ableitung null werden muss.

III. Aufstellen des Gleichungssystems für die Koeffizienten der Parabel: Es ergibt sich damit das folgende lineare Gleichungssystem mit den Unbekannten a, b und c:

$9a + 3b + c = 2$

$4a + 2b + c = 5$

$4a + b = 0$

Wir stellen das Gleichungssystem zur einfacheren Berechnung noch um, indem wir die erste mit der dritten Gleichung vertauschen:

$4a + b = 0$

$4a + 2b + c = 5$

$9a + 3b + c = 2$

IV. Bestimmung der Koeffizienten der Parabel: Wir haben das lineare Gleichungssystem wie folgt mit dem Gaußschen Algorithmus zu lösen:

Lineares Gleichungssystem:

$+ 4a + 1b = 0$
$+ 4a + 2b + 1c = 5$
$+ 9a + 3b + 1c = 2$

Anfangstableau:

4 1 0 | 0
4 2 1 | 5
9 3 1 | 2

1. Schritt: 1*(*2*) - 1*(*1*) / 4*(*3*) - 9*(*1*) /

4 1 0 | 0
0 1 1 | 5
0 3 4 | 8

2. Schritt: 1*(*3*) - 3*(*2*) /

4 1 0 | 0
0 1 1 | 5
0 0 1 | -7

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$+ 4a + 1b = 0$
$+ 1b + 1c = 5$
$+ 1c = -7$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$c = -7$
$b = 12$
$a = -3$

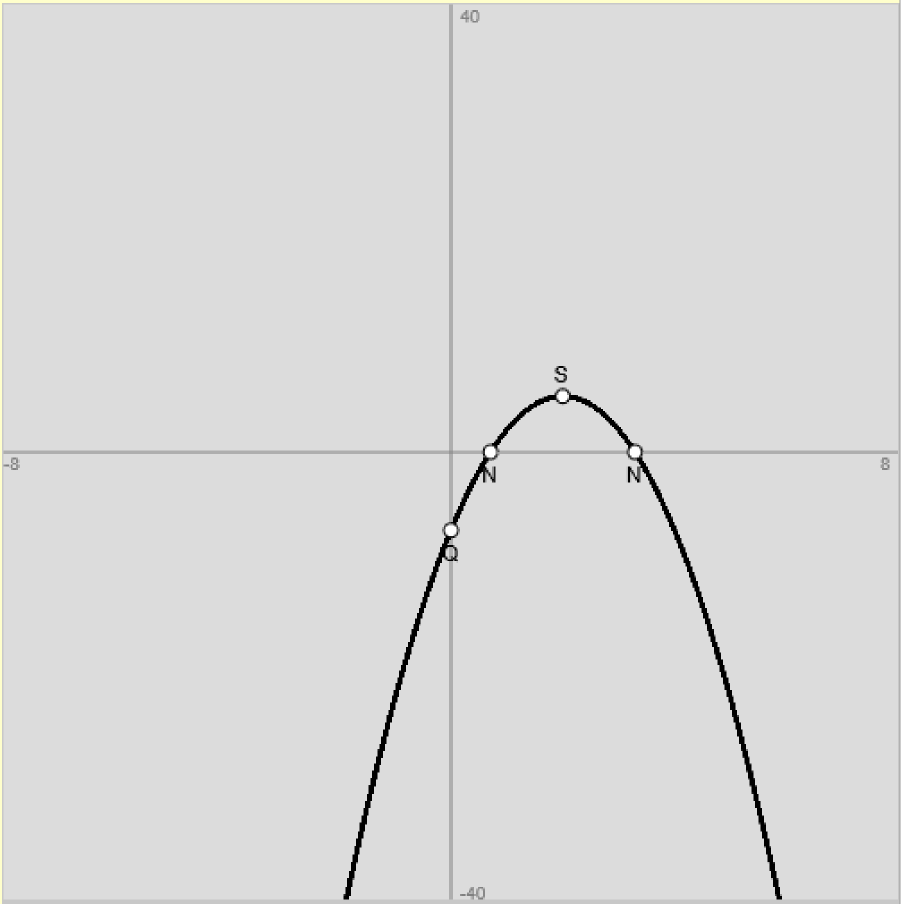
Mit a = -3, b = 12 und c =-7 erhalten wir die Funktionsgleichung der gesuchten allgemeinen Parabel als: $f(x) = -3x^2 + 12x - 7$.

V. Wertetabelle, Graph:

Wertetabelle:

x =	y = -3x² + 12x - 7
-8	-295
-7	-238
-6	-187
-5	-142
-4	-103
-3	-70
-2	-43
-1	-22
0	-7
1	2
2	5
3	2
4	-7
5	-22
6	-43
7	-70
8	-103

Graph:



Parabel: y = -3x^2 + 12x - 7

2. Lösung: I. Ansatz: f(x) als ganz rationale Funktion 2. Grades (Parabel) lässt sich darstellen als:

$$f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$$

mit zu suchendem Koeffizienten aε**R** und Scheitelpunkt $S(x_S|y_S)$ (Scheitelform der Parabelgleichung). Den Scheitelpunkt der Parabel können wir dann mit dem Hochpunkt der Aufgabenstellung identifizieren.

II. Berechnung: Es gilt mit dem Hochpunkt H(2|5) als Scheitelpunkt die Darstellung des Parabelterms:

$$f(x) = a(x-2)^2 + 5,$$

so dass nur noch der Koeffizient a zu bestimmen ist. Letzteres geschieht durch Punktprobe mit dem Parabelpunkt P(3|2) in der Identität $f(x) = a(x-2)^2 + 5$, womit sich ergibt:

$$f(3) = a(3-2)^2 + 5 = a \cdot 1^2 + 5 = a + 5 = 2,$$

also:

a + 5 = 2 => a = -3.

Die Parabelgleichung lautet insgesamt: $f(x) = -3(x-2)^2 + 5$ in der Scheitelform und lässt sich mit Hilfe der 2. binomischen Formel in die Normalform umwandeln:

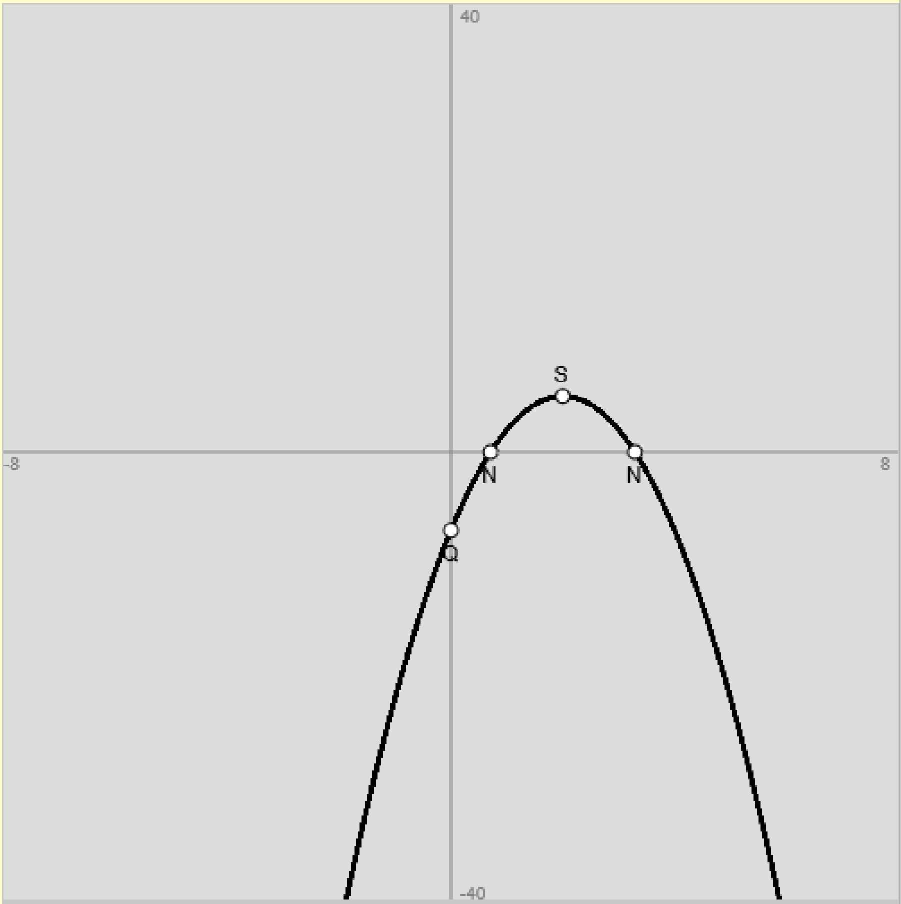
$$f(x) = -3(x-2)^2 + 5 = -3(x^2 - 4x + 4) + 5 = -3x^2 + 12x - 12 + 5 = -3x^2 + 12x - 7 .$$

III. Wertetabelle, Graph:

Wertetabelle:

x =	y = $-3x^2 + 12x - 7$
-8	-295
-7	-238
-6	-187
-5	-142
-4	-103
-3	-70
-2	-43
-1	-22
0	-7
1	2
2	5
3	2
4	-7
5	-22
6	-43
7	-70
8	-103

Graph:



Parabel: y = -3x^2 + 12x - 7

www.michael-buhlmann.de / 02.2017 / Aufgabe 313