Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Eine allgemeine Parabel 2. Grades f(x) = ax^2+bx+c verläuft durch die Punkte P(-4|65), Q(1|5) und R(2|-1). Wie lautet die Funktionsgleichung der Parabel?

1. Lösung: I. Ein lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten habe die Form:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \qquad (1)$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \qquad (2)$$

mit den reellen Variablen x_1, x_2, den reellen Koeffizienten a_{11}, … a_{22} und reellen Ergebnissen (rechten Seiten) b_1, b_2. Das lineare Gleichungssystem hat dann entweder keine Lösung, eine Lösung oder unendlich viele Lösungen. Zur Bestimmung der Variablen x_1 und x_2 lässt sich das Additionsverfahren durchführen: Hier führt die Addition des Vielfachen einer Gleichung zu der anderen zur Elimination einer Variablen. Die zweite Variable kann bestimmt werden, Einsetzen in eine der Ursprungsgleichungen führt zur Bestimmung der anderen Variablen.

II. Ansatz: f(x) als ganz rationale Funktion 2. Grades (allgemeine Parabel) wird dargestellt als:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

mit zu suchenden Koeffizienten a, b, cε**R** (Normalform der Parabelgleichung).

III. Punktproben: Es gilt durch Punktprobe, also durch Einsetzen des Punktes P(-4|65) (x = -4, y = f(x) =65) in den Ansatz $f(x) = ax^2 + bx + c$:

$$f(-4) = 65$$

und:

$$f(-4) = a\cdot(-4)^2 + b\cdot(-4) + c = 16a - 4b + c\,,$$

so dass die Identität:

$$f(-4) = 16a - 4b + c = 65$$

folgt. Entsprechendes folgt für den Punkt Q(1|5), also:

$$f(1) = a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c = a + b + c = 5\,,$$

und weiter für den Punkt R(2|-1):

$$f(2) = a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c = 4a + 2b + c = -1\,.$$

IV. Aufstellen des Gleichungssystems für die Koeffizienten der Parabel: Es ergibt sich damit das folgende lineare Gleichungssystem mit den drei Unbekannten a, b und c und den drei Gleichungen

$$\begin{array}{ll} (I) & 16a - 4b + c = 65 \\ (II) & a + b + c = 5 \\ (III) & 4a + 2b + c = -1 \end{array} \quad .$$

V. Bestimmung der Koeffizienten der Parabel: Um das obige Gleichungssystem zu lösen, subtrahieren wir von Gleichung (I) die Gleichung (II) und erhalten:

$15a-5b=60$

und ebenso von Gleichung (I) die Gleichung (III):

$12a-6b=66$,

so dass die Unbekannte c eliminiert ist und wir zwei Gleichungen mit den Unbekannten a und b erlangt haben:

$$\begin{matrix} (Ia) & 15a-5b=60 \\ (IIa) & 12a-6b=66 \end{matrix}.$$

Das Gleichungssystem aus den Gleichungen (Ia) und (IIa) können wir mit Hilfe des Additionsverfahrens ausrechnen, indem wir Gleichung (Ia) durch 5, Gleichung (IIa) durch -6 teilen:

$$\begin{matrix} (Ib) & 3a-b=12 \\ (IIb) & -2a+b=-11 \end{matrix}.$$

Addition der Gleichungen (Ib) und (IIb) führt dann auf:

a = 1,

so dass z.B. mit Gleichung (Ib) und dem Einsetzen von a=1:

$3\cdot 1-b=12 \Leftrightarrow 3-b=12 \Leftrightarrow -b=9 \Leftrightarrow b=-9$

folgt. Einsetzen von a=1 und b=-9 z.B. in Gleichung (II) ergibt:

$1+(-9)+c=5 \Leftrightarrow -8+c=5 \Leftrightarrow c=13$.

VI. Parabelgleichung: Mit a = 1, b = -9 und c = 13 erhalten wir die Funktionsgleichung der gesuchten allgemeinen (Normal-) Parabel als: $f(x)=x^2-9x+13$.

2. Lösung: I. Allgemein gilt für das Lösen von linearen Gleichungssystemen die folgende Vorgehensweise gemäß dem sog. Gaußschen Algorithmus und der Umwandlung eines linearen Gleichungssystems in Dreiecksgestalt (Stufenform):

Zur Lösung komplexer linearer Gleichungssysteme verwendet man den Gaußschen Algorithmus, d.h. folgende Vorgehensweise: 1) Das lineare Gleichungssystem aus Gleichungen und Unbekannten wird in Matrixdarstellung umgeschrieben; eine Gleichung entspricht eine Zeile, einer Unbekannten einer Spalte in der Matrix, die rechte (Zahlen-) Seite des Gleichungssystems bildet die letzte Spalte der Matrix; die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten kann auch verschieden sein. 2) Beim Gaußschen Algorithmus werden, beginnend vom Anfangstableau, Nullen unter der Hauptdiagonalen wie folgt erzeugt: 1. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 1. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 2; ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 2, so werden alle Matrixelemente in Zeile 2 mit a multipliziert, alle Matrixelemente in Zeile 1 mit b multipliziert und Produkt minus Produkt als neue Matrixelemente der Zeile 2 gebildet (Vorgehensweise (*), auch unter Beachtung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Zahlen a und b). Ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*) usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 2. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 2. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 3; ist a das zweite Element in Zeile 2 und b das zweite Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*), und dies weiter für Zeile 4 usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 3. Schritt usw., bis die letzte Matrixspalte erreicht ist. Es entsteht dadurch das Endtableau des Algorithmus, das auf die Art der Lösungen und die Lösungen des linearen Gleichungssystems hinweist. 3) Im Fall einer eindeutigen Lösung gilt: Ist im Endtableau des Gaußschen Algorithmus die Dreiecksgestalt (Stufenform) gegeben, so gilt für die Variable z der letzten Spalte mit dem dazugehörenden Matrixelement a≠0 und dem Element b der rechten Seite: az = b ⇔ z = b/a. / Für die Variable y der vorletzten Spalte mit dem dazugehörenden Matrixelement c≠0, dem Matrixelement d und dem Element e der rechten Seite gilt: cy+dz = e ⇔ cy = e – db/a ⇔ y = e/c – db/(ac) / usw., bis die Variable der ersten Matrixspalte errechnet ist.

4) Die Lösungsmenge besteht in diesem Fall – wegen der Eindeutigkeit der Lösung – aus einem Zahlentupel, also: **L** = {(l|m|…|t)} mit reellen Zahlen l, m, … t.

II. Ansatz: f(x) als ganz rationale Funktion 2. Grades (allgemeine Parabel) wird dargestellt als:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

mit zu suchenden Koeffizienten a, b, cε**R** (Normalform der Parabelgleichung).

III. Punktproben: Es gilt durch Punktprobe, also durch Einsetzen des Punktes P(-4|65) (x = -4, y = f(x) =65) in den Ansatz $f(x) = ax^2 + bx + c$:

$$f(-4) = 65$$

und:

$$f(-4) = a \cdot (-4)^2 + b \cdot (-4) + c = 16a - 4b + c \,,$$

so dass die Identität:

$$f(-4) = 16a - 4b + c = 65$$

folgt. Entsprechendes folgt für den Punkt Q(1|5), also:

$$f(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c = 5 \,,$$

und weiter für den Punkt R(2|-1):

$$f(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 4a + 2b + c = -1 \,.$$

IV. Aufstellen des Gleichungssystems für die Koeffizienten der Parabel: Es ergibt sich damit das folgende lineare Gleichungssystem mit den drei Unbekannten a, b und c und den drei Gleichungen

$$\begin{array}{ll} (I) & 16a - 4b + c = 65 \\ (II) & a + b + c = 5 \qquad . \\ (III) & 4a + 2b + c = -1 \end{array}$$

V. Lösen des linearen Gleichungssystems, Bestimmung der Koeffizienten der Parabel: Wir gehen wie folgt vor:

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} + & 16a & - & 4b & + & 1c & = & 65 \\ + & 1a & + & 1b & + & 1c & = & 5 \\ + & 4a & + & 2b & + & 1c & = & -1 \end{array}$$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{rrr|r} 16 & -4 & 1 & 65 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \end{array}$$

1. Schritt: 16*(*2*) - 1*(*1*) / 4*(*3*) - 1*(*1*) /

$$\begin{array}{rrr|r} 16 & -4 & 1 & 65 \\ 0 & 20 & 15 & 15 \\ 0 & 12 & 3 & -69 \end{array}$$

2. Schritt: 5*(*3*) - 3*(*2*) /

$$\begin{array}{rrr|r} 16 & -4 & 1 & 65 \\ 0 & 20 & 15 & 15 \\ 0 & 0 & -30 & -390 \end{array}$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} + & 16a & - & 4b & + & 1c & = & 65 \\ & & + & 20b & + & 15c & = & 15 \\ & & & & - & 30c & = & -390 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$c = 13$
$b = -9$
$a = 1$

VI. Parabelgleichung: Mit a = 1, b = -9 und c = 13 erhalten wir die Funktionsgleichung der gesuchten allgemeinen (Normal-) Parabel als: $f(x) = x^2 - 9x + 13$.

3. Lösung: I. Allgemein gilt für das Lösen von linearen Gleichungssystemen die folgende Vorgehensweise gemäß dem sog. Gaußschen Algorithmus und der Umwandlung eines linearen Gleichungssystems in Diagonalgestalt:

Zur Lösung komplexer linearer Gleichungssysteme verwendet man den Gaußschen Algorithmus, d.h. folgende Vorgehensweise: 1) Das lineare Gleichungssystem aus Gleichungen und Unbekannten wird in Matrixdarstellung umgeschrieben; eine Gleichung entspricht eine Zeile, einer Unbekannten einer Spalte in der Matrix, die rechte (Zahlen-) Seite des Gleichungssystems bildet die letzte Spalte der Matrix; die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten kann auch verschieden sein. 2) Beim Gaußschen Algorithmus werden, beginnend vom Anfangstableau, Nullen unterhalb und oberhalb der Hauptdiagonalen wie folgt erzeugt: 1. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 1. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 2; ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 2, so werden alle Matrixelemente in Zeile 2 mit a multipliziert, alle Matrixelemente in Zeile 1 mit b multipliziert und Produkt minus Produkt als neue Matrixelemente der Zeile 2 gebildet (Vorgehensweise (*), auch unter Beachtung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Zahlen a und b). Ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*) usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 2. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 2. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 1; ist a das zweite Element in Zeile 2 und b das zweite Element in Zeile 1, so gilt die analoge Vorgehensweise (*), und dies weiter für Zeile 3 usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 3. Schritt usw., bis die letzte Matrixspalte erreicht ist. Damit ergibt sich die Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems; auf dessen linker Seite finden sich Koeffizienten ≠0 nur noch in der Hauptdiagonale; mit dem Teilen der jeweiligen Gleichung durch das jeweilige Diagonalelement umfasst im Fall der eindeutigen Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems die Matrixdiagonale lauter 1 als Elemente. Es entsteht dadurch das Endtableau des Algorithmus. 3) Ist also im Endtableau des Gaußschen Algorithmus die Diagonalform gegeben, so gilt für die Variable x einer Spalte mit dem dazugehörenden Matrixelement 1 und dem Element l der rechten Seite sofort: x = l. 4) Die Lösungsmenge besteht in diesem Fall – wegen der Eindeutigkeit der Lösung – aus einem Zahlentupel, also: **L** = {(l|m|…|t)} mit reellen Zahlen l, m, … t.

II. Ansatz: f(x) als ganz rationale Funktion 2. Grades (allgemeine Parabel) wird dargestellt als:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

mit zu suchenden Koeffizienten a, b, cε**R** (Normalform der Parabelgleichung).

III. Punktproben: Es gilt durch Punktprobe, also durch Einsetzen des Punktes P(-4|65) (x = -4, y = f(x) =65) in den Ansatz $f(x) = ax^2 + bx + c$:

$$f(-4) = 65$$

und:

$$f(-4) = a \cdot (-4)^2 + b \cdot (-4) + c = 16a - 4b + c,$$

so dass die Identität:

$$f(-4) = 16a - 4b + c = 65$$

folgt. Entsprechendes folgt für den Punkt Q(1|5), also:

$$f(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c = 5,$$

und weiter für den Punkt R(2|-1):

$f(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 4a + 2b + c = -1$.

IV. <u>Aufstellen des Gleichungssystems für die Koeffizienten der Parabel</u>: Es ergibt sich damit das folgende lineare Gleichungssystem mit den drei Unbekannten a, b und c und den drei Gleichungen

$$\begin{array}{ll} (I) & 16a - 4b + c = 65 \\ (II) & a + b + c = 5 \\ (III) & 4a + 2b + c = -1 \end{array} .$$

V. <u>Lösen des linearen Gleichungssystems, Bestimmung der Koeffizienten der Parabel</u>: Wir gehen wie folgt vor:

<u>Lineares Gleichungssystem</u>:

+ 16*a* - 4*b* + 1*c* = 65
+ 1*a* + 1*b* + 1*c* = 5
+ 4*a* + 2*b* + 1*c* = -1

<u>Anfangstableau</u>:

16 -4 1 | 65
1 1 1 | 5
4 2 1 | -1

<u>1. Schritt</u>: 16*(*2*) - 1*(*1*) / 4*(*3*) - 1*(*1*) /

16 -4 1 | 65
0 20 15 | 15
0 12 3 | -69

<u>2. Schritt</u>: 5*(*1*) + 1*(*2*) / 5*(*3*) - 3*(*2*) /

80 0 20 | 340
0 20 15 | 15
0 0 -30 | -390

<u>3. Schritt</u>: 3*(*1*) + 2*(*3*) / 2*(*2*) + 1*(*3*) /

240 0 0 | 240
0 40 0 | -360
0 0 -30 | -390

<u>Teilen</u>: (*1*):240 / (*2*):40 / (*3*):(-30) /

1 0 0 | 1
0 1 0 | -9
0 0 1 | 13

<u>Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems</u>:

+ 1*a* = 1
+ 1*b* = -9
+ 1*c* = 13

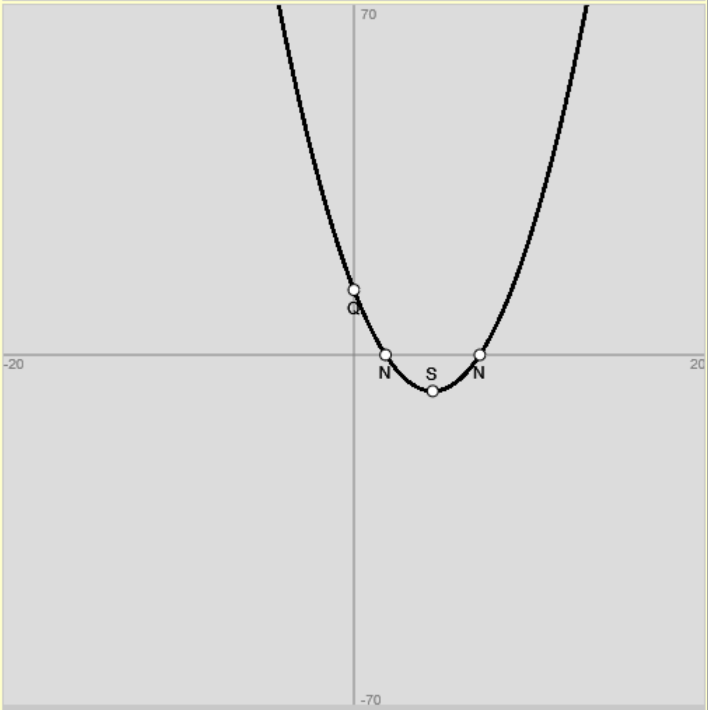
<u>Lösungen des linearen Gleichungssystems</u>:

a = 1
b = -9
c = 13

VI. <u>Parabelgleichung</u>: Mit a = 1, b = -9 und c = 13 erhalten wir die Funktionsgleichung der gesuchten allgemeinen (Normal-) Parabel als: $f(x) = x^2 - 9x + 13$.

VII. Wertetabelle, Graph:

Wertetabelle:		Graph:
x =	$y = 1x^2 - 9x + 13$	
-20	593	
-19	545	
-18	499	
-17	455	
-16	413	
-15	373	
-14	335	
-13	299	
-12	265	
-11	233	
-10	203	
-9	175	
-8	149	
-7	125	
-6	103	
-5	83	
-4	65	
-3	49	
-2	35	
-1	23	
0	13	
1	5	
2	-1	
3	-5	
4	-7	
5	-7	
6	-5	
7	-1	
8	5	
9	13	
10	23	



Parabel: y = 1x^2 - 9x + 13

www.michael-buhlmann.de / 11.2017 / Aufgabe 536