Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Eine allgemeine Parabel 2. Grades verläuft durch die Punkte P(-2|-5), Q(0|5) und R(3|-10). Wie lautet die Funktionsgleichung der Parabel?

Lösung: I. Allgemein gilt bei Bestimmungsaufgaben für Funktionen y = f(x), dass die in der Aufgabenstellung angegeben Eigenschaften der Funktion in mathematische Gleichungen übertragen werden müssen. Die Funktion und deren Ableitungen werden dabei im Funktionsansatz als Funktionsterme mit noch zu bestimmenden Koeffizienten angegeben. Die mathematischen Gleichungen bilden dann ein (lineares) Gleichungssystem, das mit geeigneten mathematischen Verfahren (Gauß-Algorithmus u.a.) nach den zu bestimmenden Koeffizienten umgeformt werden muss. Einsetzen der Koeffizienten in den Funktionsansatz liefert die gesuchte Funktion, eine (eventuell vorzunehmende) Probe bestätigt oder widerlegt die Richtigkeit der gefundenen Funktion (notwendige und hinreichende Bedingungen bei Extrem- und Wendepunkten beachten).
Für ganz rationale Funktionen 2. Grades ergibt sich die folgende Übersicht und Vorgehensweise:

Funktionsansatz (ganz rationale Funktion vom Grad 2, Koeffizienten a, b, c):	$f(x) = ax^2+bx+c$
Punkt $P(x_1\|y_1)$ (Punktprobe für vorgegebenen Punkt): Punkt $Q(x_2\|y_2)$ (Punktprobe für vorgegebenen Punkt): Punkt $R(x_3\|y_3)$ (Punktprobe für vorgegebenen Punkt): Aufstellen eines linearen Gleichungssystems mit den noch unbekannten Koeffizienten a, b, c	$f(x_1) = y_1$ $f(x_2) = y_2$ $f(x_3) = y_3$
Lösen des linearen Gleichungssystems, bestehend aus den Gleichungen der Punktproben; Berechnung der Koeffizienten a, b, c	
Einsetzen der Koeffizienten a, b, c in den Funktionsansatz; Funktionsgleichung: $f(x) = ax^2+bx+c$	

II. Ein lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten habe die Form:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \quad (1)$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \quad (2)$$

mit den reellen Variablen x_1, x_2, den reellen Koeffizienten a_{11}, … a_{22} und reellen Ergebnissen (rechten Seiten) b_1, b_2. Das lineare Gleichungssystem hat dann entweder keine Lösung, eine Lösung oder unendlich viele Lösungen. Zur Bestimmung der Variablen x_1 und x_2 lässt sich das Additionsverfahren durchführen: Hier führt die Addition des Vielfachen einer Gleichung zu der anderen zur Elimination einer Variablen. Die zweite Variable kann bestimmt werden, Einsetzen in eine der Ursprungsgleichungen führt zur Bestimmung der anderen Variablen.

III. Ansatz: f(x) als ganz rationale Funktion 2. Grades (allgemeine Parabel) wird dargestellt als:

$f(x) = ax^2+bx+c$

mit zu suchenden Koeffizienten a, b, $c \in \mathbf{R}$ (Normalform der Parabelgleichung).

IV. Punktproben: Wir wenden uns zunächst dem Punkt Q(0|5) mit x = 0 als x-Koordinate zu. Es gilt durch Punktprobe, also durch Einsetzen des Punktes (x = 0, y = f(x) = 5) in den Ansatz $f(x) = ax^2+bx+c$:

$f(0) = 5$

und:

$f(0) = a\cdot 0^2+b\cdot 0+c = c$,

so dass die Identität:

$c = 5$

folgt. Entsprechendes folgt für den Punkt P(-2|-5), also:

$f(-2) = 5$, $f(-2) = a\cdot(-2)^2+b\cdot(-2)+c = 4a-2b+c$

mit:

$4a-2b+c = -5$

und weiter für den Punkt R(3|-10):

$f(3) = -10$, $f(-3) = a\cdot 3^2+b\cdot 3+c = 9a+3b+c$

mit:

$9a+3b+c = -10$.

V. Aufstellen des Gleichungssystems für die Koeffizienten der Parabel: Es ergibt sich damit das folgende lineare Gleichungssystem mit den drei Unbekannten a, b und c und den drei Gleichungen

$c = 5$ (I)
$4a-2b+c = -5$ (II)
$9a+3b+c = -10$ (III),

so dass Einsetzen von c = 5 in die Gleichungen (II) und (III) zu einem Gleichungssystem mit den zwei Unbekannten a, b und den zwei Gleichungen:

$4a-2b+5 = -5 \Rightarrow 4a-2b = -10$ (1)
$9a+3b+5 = -10 \Rightarrow 9a+3b = -15$ (2)

führt.

VI. Bestimmung der Koeffizienten der Parabel: Um das obige Gleichungssystem der Gleichungen (1) und (2) zu lösen, führen wir das Additionsverfahren durch, indem wir Gleichung (1) mit 3, Gleichung (2) mit 2 multiplizieren. Addieren der so erhaltenen Gleichungen lässt die Variable b in der addierten Gleichung wegfallen, so dass die Unbekannte a zu bestimmen ist. Durch Einsetzen des Koeffizienten a in eine Gleichung mit b lässt sich b errechnen. Im Einzelnen heißt das:

$4a-2b = -10$ $|\cdot 3$
$9a+3b = -15$ $|\cdot 2$

$12a-6b = -30$
$18a+6b = -30$ (Addition der Gleichungen)

$30a = -60$ $|:30$
$a = -2$

$a = -2 \Rightarrow 4\cdot(-2)-2b = -10 \Rightarrow -8-2b = -10 \Rightarrow -2b = -2 \Rightarrow b = 1$

Die Koeffizienten der allgemeinen Parabel lauten hiermit: a = -2, b = 1, c = 5.

VII. Parabelgleichung: Mit a = -2, b = 1 und c = 5 und dem Einsetzen der errechneten Koeffizienten in den Funktionsansatz: $f(x) = ax^2+bx+c$ erhalten wir die Funktionsgleichung der gesuchten allgemeinen (Normal-) Parabel als:

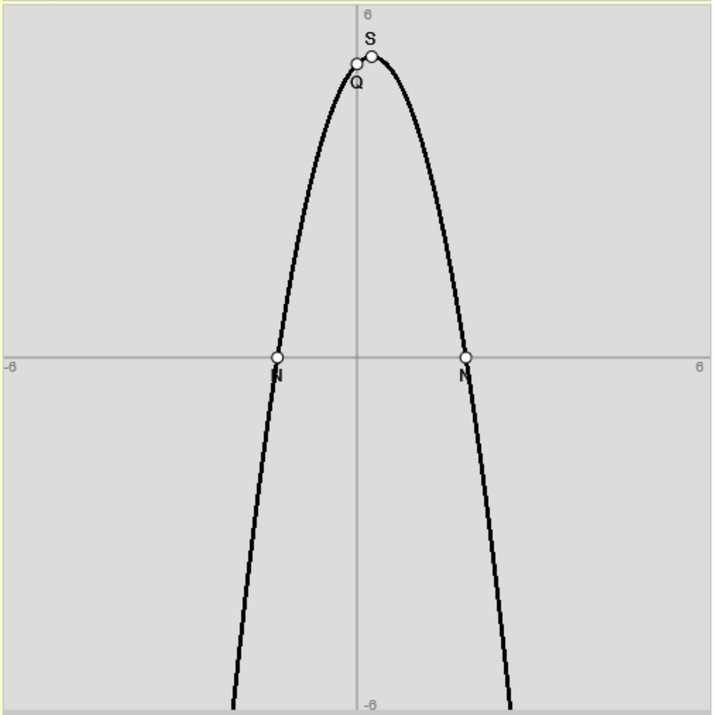
$f(x) = -2x^2+x+5$.

VIII. Wertetabelle, Graph:

Wertetabelle:

x =	y = $-2x^2 + 1x + 5$
-6	-73
-5.5	-61
-5	-50
-4.5	-40
-4	-31
-3.5	-23
-3	-16
-2.5	-10
-2	-5
-1.5	-1
-1	2
-0.5	4
0	5
0.5	5
1	4
1.5	2
2	-1
2.5	-5
3	-10
3.5	-16
4	-23
4.5	-31
5	-40
5.5	-50
6	-61

Graph:



Parabel: y = -2x^2 + 1x + 5

www.michael-buhlmann.de / 02.2018 / Aufgabe 551