Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Gesucht ist der Funktionsterm einer allgemeinen quadratischen Parabel, deren Kurve durch die Nullstellen $N_1(-2|0)$, $N_2(4|0)$ sowie den Punkt $P(-1|-5)$ verläuft.

Lösung: I. Allgemein gilt bei Bestimmungsaufgaben für Funktionen $y = f(x)$, dass die in der Aufgabenstellung angegeben Eigenschaften der Funktion in mathematische Gleichungen übertragen werden müssen. Die Funktion wird dabei im Funktionsansatz als Funktionsterme mit noch zu bestimmenden Koeffizienten angegeben. Die mathematischen Gleichungen bilden dann ein (lineares) Gleichungssystem, das mit geeigneten mathematischen Verfahren nach den zu bestimmenden Koeffizienten umgeformt werden muss. Einsetzen der Koeffizienten in den Funktionsansatz liefert die gesuchte Funktion. Für ganz rationale Funktionen 2. Grades ergibt sich die folgende Übersicht und Vorgehensweise, wenn die zwei Nullstellen der Parabel gegeben sind:

Funktionsansatz (ganz rationale Funktion vom Grad 2, Koeffizient a, Nullstellen x_1, x_2):	$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$
Einsetzen der x-Koordinaten x_1, y_2 der vorgegebenen Nullstellen $N_1(x_1\|0)$, $N_2(x_2\|0)$:	$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$
Punkt $P(x_1\|y_1)$ (Punktprobe für vorgegebenen Punkt):	$f(x_1) = y_1$
Aufstellen einer linearen Gleichung mit dem noch unbekannten Koeffizienten a; Lösen der linearen Gleichung durch Umstellen nach a	
Einsetzen des Koeffizienten a in den Funktionsansatz; Funktionsgleichung:	$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$

Produktform der Parabel

II. Der Funktionsterm einer allgemeinen Parabel 2. Grades in der Produktform mit den Nullstellen $N_1(x_1|0)$ und $N_2(x_2|0)$ und mit reellem Koeffizienten a folgt dem Ansatz:

$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ (*).

III. Einsetzen der vorgegebenen Nullstellen $N_1(-2|0)$, $N_2(4|0)$ in den Ansatz (*) ergibt:

$f(x) = a(x-(-2))(x-4) = a(x+2)(x-4)$ (**).

IV. Einsetzen (Punktprobe) des vorgegebenen Punkts P in den Funktionsterm (**) (x-f(x)[=y]-Koordinaten des Punkts) führt auf:

Punkt $P(-1|-5)$: $-5 = a\cdot((-1)+2)((-1)-4)$ =>
$a = 1$.

V. Es ergibt sich durch Einsetzen des errechneten Koeffizienten a in (**) die Produktform der allgemeinen Parabel:

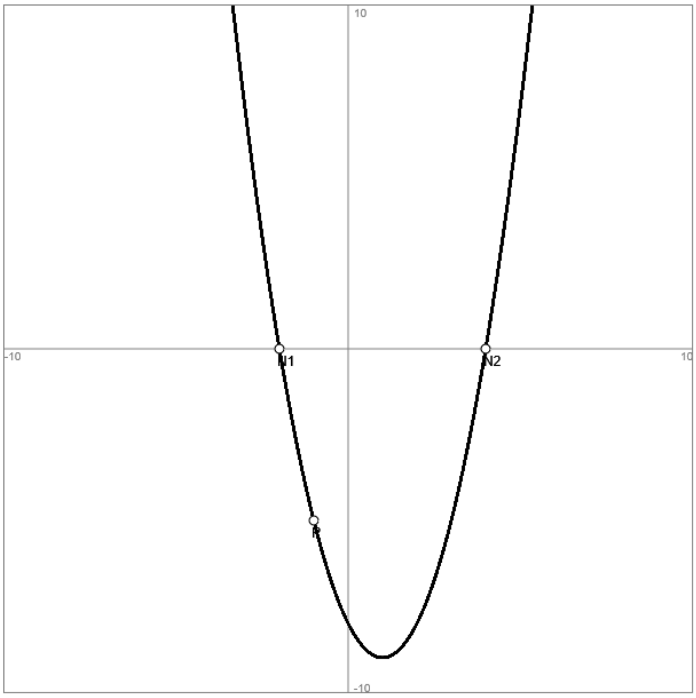
$f(x) = (x+2)(x-4)$.

VI. Ausmultiplizieren der Klammern ergibt die Normalform der allgemeinen Parabel mit den Koeffizienten $a = 1$, $b = -2$, $c = -8$:

$f(x) = x^2 - 2x - 8$.

VII. Funktionsgraph:

$f(x) = x^2 - 2x - 8$ ▶



www.michael-buhlmann.de / 01.2020 / Aufgabe 969