

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Eine ganz rationale Funktion 3. Grades besitzt an der Stelle $x = 1$ einen Wendepunkt mit Wendetangente $y = -3x + 1$ und einen Tiefpunkt an der Stelle $x = 3$. Wie lautet die Funktionsgleichung?

Lösung: I. Ganz rationale Funktion: Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$,
 $f''(x) = 6ax + 2b$

Eigenschaften:

(1) Wendepunkt an der Stelle $x = 1$:

a) Tangente $\rightarrow f(1) = y(1) = -3 \cdot 1 + 1 = -2 \rightarrow$ Punkt $W(1|-2) \rightarrow f(1) = -2 \rightarrow$

$$\text{Gleichung: } a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = -2$$

b) Tangente $\rightarrow f'(1) = y' = -3 \rightarrow$ Gleichung: $3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c = -3$

c) Wendepunkt $\rightarrow f''(1) = 0 \rightarrow$ Gleichung: $6a \cdot 1 + 2b = 0$

(2) Tiefpunkt an der Stelle $x = 3$: $f'(3) = 0 \rightarrow$ Gleichung: $3a \cdot 3^2 + 2b \cdot 3 + c = 0$

II. Koeffizientenbestimmung: 4x4-Gleichungssystem (Diagonalgestalt)

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcl} + & 1a + 1b + 1c + 1d & = -2 \\ + & 3a + 2b + 1c & = -3 \\ + & 6a + 2b & = 0 \\ + & 27a + 6b + 1c & = 0 \end{array}$$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -3 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 27 & 6 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

1. Schritt: $1 \cdot (2) - 3 \cdot (1) / 1 \cdot (3) - 6 \cdot (1) / 1 \cdot (4) - 27 \cdot (1) /$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & -4 & -6 & -6 & 12 \\ 0 & -21 & -26 & -27 & 54 \end{array}$$

2. Schritt: $1 \cdot (1) + 1 \cdot (2) / -1 \cdot (3) + 4 \cdot (2) / -1 \cdot (4) + 21 \cdot (2) /$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & -36 & 9 \end{array}$$

3. Schritt: $-2 \cdot (1) + 1 \cdot (3) / -1 \cdot (2) + 1 \cdot (3) / -1 \cdot (4) + 8 \cdot (3) /$

$$\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & -9 \end{array}$$

4. Schritt: $-6 \cdot (1) + 1 \cdot (4) / -4 \cdot (2) + 1 \cdot (4) / -2 \cdot (3) + 1 \cdot (4) /$

$$\begin{array}{cccc|c} 12 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & -9 \end{array}$$

Teilen: (1):12 / (2):(-4) / (3):4 / (4):(-12) /

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0.25 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -0.75 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2.25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.75 \end{array}$$

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcl} + 1a & = & 0.25 \\ + 1b & = & -0.75 \\ + 1c & = & -2.25 \\ + 1d & = & 0.75 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{l} a = 0.25 \\ b = -0.75 \\ c = -2.25 \\ d = 0.75 \end{array}$$

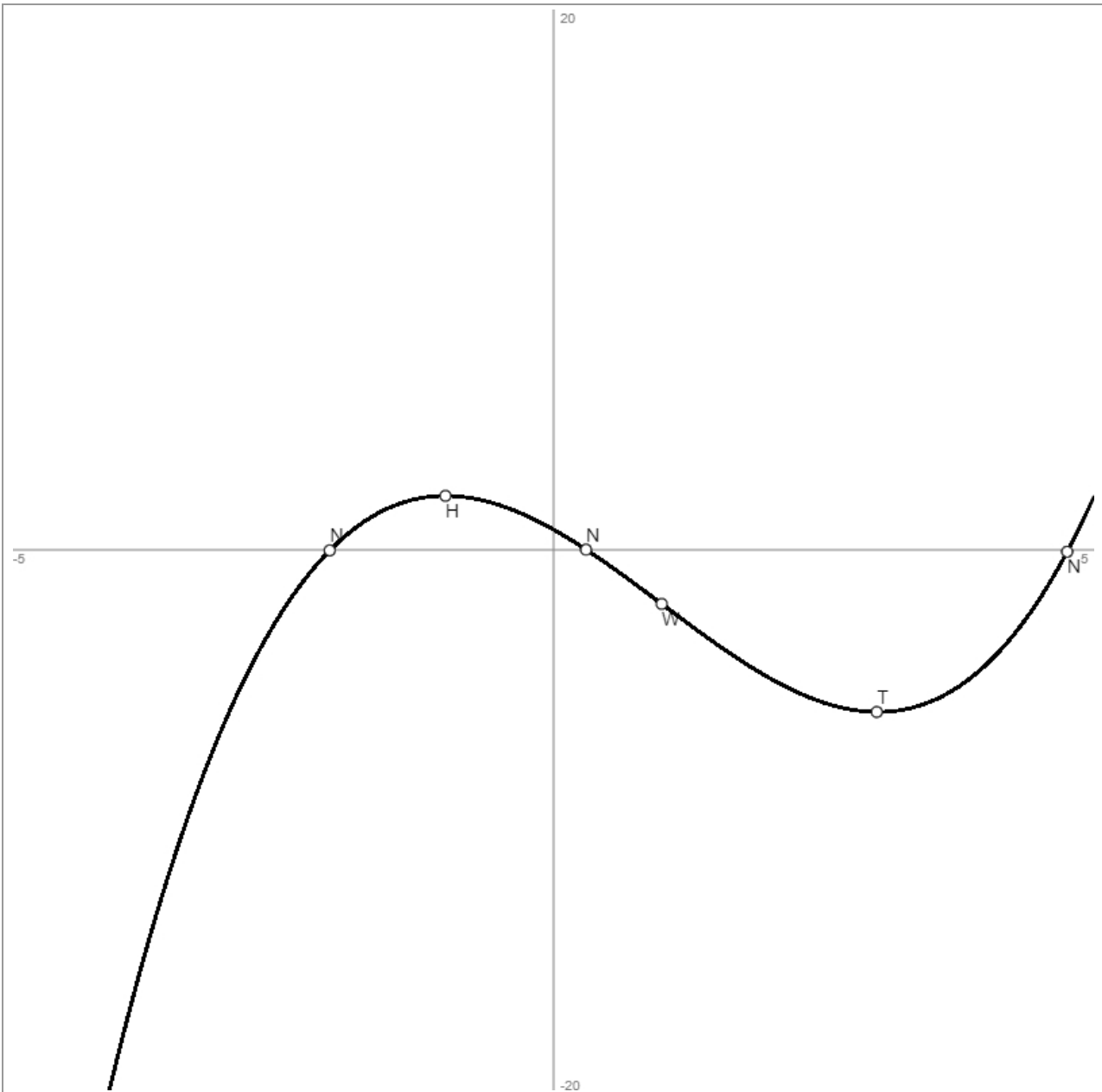
III. Funktion: $f(x) = 0,25x^3 - 0,75x^2 - 2,25x + 0,75$

IV. Wertetabelle, Graph: $f(x) = 0,25x^3 - 0,75x^2 - 2,25x + 0,75$; $f'(x) = 0,5x^2 - 1,5x - 2,25$; $f''(x) = x - 1,5$

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-5	-38	24	-9	
-4.5	-27.0937	19.69	-8.25	
-4	-18.25	15.75	-7.5	
-3.5	-11.2812	12.19	-6.75	
-3	-6	9	-6	
-2.5	-2.2187	6.19	-5.25	
-2.07	-0.0236	4.07	-4.61	Nullstelle N(-2.07 0)
-2	0.25	3.75	-4.5	
-1.5	1.5938	1.69	-3.75	
-1	2	0	-3	Hochpunkt H(-1 2)
-0.5	1.6563	-1.31	-2.25	
0	0.75	-2.25	-1.5	Schnittpunkt $S_y(0 0.75)$
0.3	0.0143	-2.63	-1.05	Nullstelle N(0.3 0)
0.5	-0.5312	-2.81	-0.75	
1	-2	-3	0	Wendepunkt W(1 -2)
1.5	-3.4687	-2.81	0.75	
2	-4.75	-2.25	1.5	
2.5	-5.6562	-1.31	2.25	
3	-6	0	3	Tiefpunkt T(3 -6)
3.5	-5.5937	1.69	3.75	
4	-4.25	3.75	4.5	

4.5	-1.7812	6.19	5.25	
4.75	-0.0664	7.55	5.63	Nullstelle N(4.75 0)
5	2	9	6	

Graph:



www.michael-buhlmann.de / 01.2021 / Aufgabe 1263