Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Erläutere auch anhand von Beispielen, wie eine Bestimmungsaufgabe zu einer Funktion $f(x) = a(x+b)e^{kx}$ (e als Eulersche Zahl, a, b, k reell, a≠0, k≠0) aufgebaut sein könnte.

Lösung: I. Die Funktion $f(x) = a(x+b)e^{kx}$ ist ein Produkt aus ganz rationalem und exponentiellem Anteil. Dementsprechend lassen sich die Ableitungen gemäß der Produktregel ((u(x)v(x))‘ = u‘(x)v(x) + u(x)v‘(x)) wie folgt bilden:

$f(x) = a(x+b)e^{kx}$ (Funktion)

$f'(x) = ae^{kx} + ak(x+b)e^{kx} = a(1+k(x+b))e^{kx}$ (1. Ableitung)

$f''(x) = ake^{kx} + ak(1+k(x+b))e^{kx} = ak(2+k(x+b))e^{kx}$ (2. Ableitung)

Gemäß Funktion und Ableitungen finden sich Nullstelle, Extremstelle und Wendestelle bei:

$f(x) = a(x+b)e^{kx}$ = 0 => x_N = -b => Nullstelle N(-b|0)

$f'(x) = a(1+k(x+b))e^{kx}$ = 0 => $1+k(x+b)$ = 0 => $k(x+b)$ = -1 => $x+b = -\frac{1}{k}$ => x_E = $-\frac{1}{k} - b$

mit $f(-\frac{1}{k} - b) = -\frac{a}{k}e^{-1-kb}$ => Extremstelle (Hoch- oder Tiefpunkt) E($-\frac{1}{k} - b \mid -\frac{a}{k}e^{-1-kb}$)

$f''(x) = ak(2+k(x+b))e^{kx}$ = 0 => $2+k(x+b)$ = 0 => $k(x+b)$ = -2 => $x+b = -\frac{2}{k}$ => x_W = $-\frac{2}{k} - b$ mit $f(-\frac{2}{k} - b) = -\frac{2a}{k}e^{-2-kb}$ => Wendepunkt W($-\frac{2}{k} - b \mid -\frac{2a}{k}e^{-2-kb}$).

Wegen k = $-\frac{1}{x_E + b} = -\frac{2}{x_W + b}$ (Extremstelle, Wendestelle) gilt noch:

$-\frac{1}{x_E + b} = -\frac{2}{x_W + b}$ ⇔ $\frac{1}{x_E + b} = \frac{2}{x_W + b}$ ⇔ $x_W + b = 2(x_E + b)$ ⇔ $x_W + b = 2x_E + 2b$ ⇔ $x_W - 2x_E = b$,

d.h.: die drei besonderen Kurvenpunkte (Nullstelle, Extremstelle, Wendestelle) der Funktion $f(x) = a(x+b)e^{kx}$ hängen zusammen vermöge der Beziehung:

$2x_E - x_W = x_N$.

II. Eine Bestimmungsaufgabe der Funktion $f(x) = a(x+b)e^{kx}$ basiert auf den Eigenschaften (Punkte, Stellen) der Funktion, die zur Errechnung der reellen Unbekannten a, b, k verwendet werden. Es entsteht ein nichtlineares Gleichungssystem mit drei Unbekannten, die nur unter besonderen Voraussetzungen exakt berechnet werden können. Im Folgenden seien einige diesbezügliche Voraussetzungen erörtert:

a) Gegeben: Nullstelle x_N≠0, Punkte P(0|y_1) (y_1≠0), Q(x_2|y_2). Es gilt: b = -x_N sowie:

P(0|y_1): $a(0+b)e^{k\cdot 0} = y_1$ => $ab = y_1$ => $a = \frac{y_1}{b}$

Q(x_2|y_2): $a(x_2+b)e^{kx_2} = y_2$ => $e^{kx_2} = \frac{y_2}{a(x_2+b)}$ => $kx_2 = \ln\left(\frac{y_2}{a(x_2+b)}\right)$ => k = $\frac{\ln\left(\frac{y_2}{a(x_2+b)}\right)}{x_2}$.

b) Gegeben: Nullstelle x_N, Extremstelle x_E, Punkt P(x_0|y_0). Es gilt: b = -x_N, k = $-\frac{1}{x_E+b}$, so dass mit: P(x_0|y_0): $a(x_0+b)e^{kx_0} = y_0$ => a = $\frac{y_0}{(x_0+b)e^{kx_0}}$ folgt.

c) Gegeben: Nullstelle x_N, Wendestelle x_W, Punkt P(x_0|y_0). Es gilt: b = -x_N, k = $-\frac{2}{x_W+b}$, so dass mit: P(x_0|y_0): $a(x_0+b)e^{kx_0} = y_0$ => a = $\frac{y_0}{(x_0+b)e^{kx_0}}$ folgt.

d) Gegeben: Extremstelle x_E, Wendestelle x_W, Punkt P(x_0|y_0). Es gilt: b = x_W – 2x_E, k = $-\frac{1}{x_E+b}$, so dass mit: P(x_0|y_0): $a(x_0+b)e^{kx_0} = y_0$ => a = $\frac{y_0}{(x_0+b)e^{kx_0}}$ folgt.

(x_2, x_N, x_E, x_W paarweise verschieden).

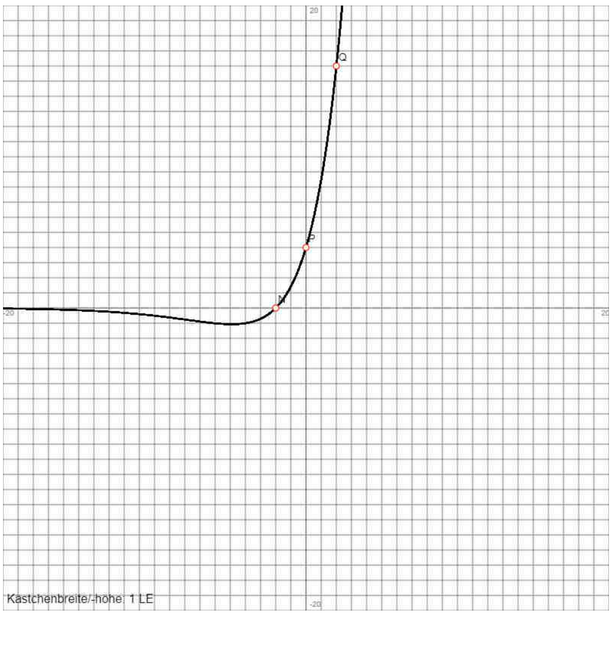
III. Beispiel: Die Kurve einer Funktion vom Typ $f(x) = a(x+b)e^{kx}$ (e als Eulersche Zahl, a, b, k als reelle Zahlen, a≠0, k≠0) schneidet die y-Achse bei y = 4, besitzt die Nullstelle x = -2 und verläuft durch den Punkt Q(2|16). Die Funktionsgleichung bestimmt sich gemäß:

Nullstelle N(-2|0): $f(-2) = a(-2+b)e^{k(-2)} = 0$ => -2 + b = 0 => b = 2

y-Achsenabschnittspunkt P(0|4): $f(0) = a(0+b)e^{k\cdot 0} = 4$ => ab = 4 => 2a = 4 => a = 2

Punkt Q(2|8): $f(2) = a(2+b)e^{k\cdot 2} = 16$ => 2·4·e^{2k} = 16 => 8e^{2k} = 16 => e^{2k} = 2 => 2k = ln(2) => k = ln(2)/2 = 0,3466

als: $f(x) = 2(x+2)e^{0,3466x}$.



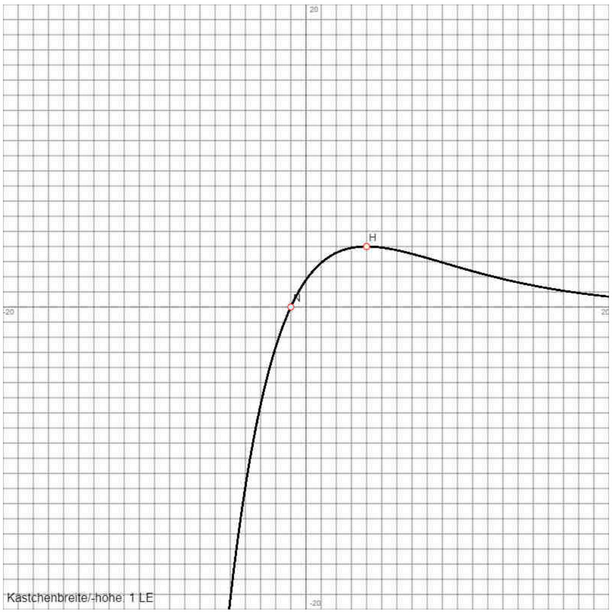
IV. Beispiel: Die Kurve einer Funktion vom Typ $f(x) = a(x+b)e^{kx}$ (e als Eulersche Zahl, a, b, k als reelle Zahlen, a≠0, k≠0) besitzt die Nullstelle x = -1 und den Hochpunkt H(4|4). Die Funktionsgleichung bestimmt sich gemäß:

Nullstelle N(-1|0): $f(-1) = a(-1+b)e^{k(-1)} = 0$ => -1 + b = 0 => b = 1

Hochpunkt H(4|4): $f'(4) = a(1+k(4+b))e^{k4} = 0$ => 1+k(4+b) = 0 => 1 + 5k = 0 => 5k = -1 => k = -0,2

Hochpunkt H(4|4): $f(4) = a(4+b)e^{k\cdot 4} = 4$ => a·5·$e^{-0,8}$ = 4 => a = 0,8$e^{0,8}$ = 1,78

als: $f(x) = 1{,}78 \cdot (x+1)e^{-0{,}2x}$.



V. Beispiel: Die Kurve einer Funktion vom Typ $f(x) = a(x+b)e^{kx}$ (e als Eulersche Zahl, a, b, k als reelle Zahlen, a≠0, k≠0) besitzt die Extremstelle x = 3 und den Wendepunkt W(0|5). Die Funktionsgleichung bestimmt sich gemäß:

Extremstelle x = 3: $f'(3) = a(1+k(3+b))e^{k3} = 0$ => 1+k(3+b) = 0 => k(3+b) = -1 => k = -1/(3+b)

Wendepunkt W(0|5): $f''(0) = ak(2+k(0+b))e^{k\cdot 0} = 0$ => 2+kb = 0 => kb = -2 => k = -2/b

-> k = -1/(3+b) = -2/b => 3+b = b/2 => b/2 = -3 => b = -6

-> k = -2/(-6) = 1/3

Wendepunkt W(0|5): $f(0) = a(0+b)e^{k\cdot 0} = 5$ => a·(-6)·e^0 = 5 => -6a = 5 => a = -5/6

als: $f(x) = -\frac{5}{6} \cdot (x-6)e^{\frac{1}{3}x}$.