Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Der Graph einer ganz rationalen Funktion 3. Grades verläuft durch die Punkte A(-2|-14), B(0|-4), C(1|4) und D(2|22). Wie lautet die Funktionsgleichung?

1. Lösung: I. Ganz rationale Funktion: Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Eigenschaften:

(1) Punkt A(-2|-14): f(-2) = -14 -> Gleichung: $a\cdot(-2)^3 + b\cdot(-2)^2 + c\cdot(-2) + d = -14$
(2) Punkt B(0|-4): f(0) = -4 -> Gleichung: $a\cdot0^3 + b\cdot0^2 + c\cdot0 + d = -4$
(3) Punkt C(1|4): f(1) = 4 -> Gleichung: $a\cdot1^3 + b\cdot1^2 + c\cdot1 + d = 4$
(4) Punkt D(2|22): f(2) = 22 -> Gleichung: $a\cdot2^3 + b\cdot2^2 + c\cdot2 + d = 22$

II. Koeffizientenbestimmung: 4x4-Gleichungssystem (Dreiecksgestalt)

Lineares Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr}
- & 8a & + & 4b & - & 2c & + & 1d & = -14 \\
 & & & & & & + & 1d & = -4 \\
+ & 1a & + & 1b & + & 1c & + & 1d & = 4 \\
+ & 8a & + & 4b & + & 2c & + & 1d & = 22
\end{array}
$$

Anfangstableau:

$$
\begin{array}{rrrr|r}
-8 & 4 & -2 & 1 & -14 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\
8 & 4 & 2 & 1 & 22
\end{array}
$$

1. Schritt: 8*(*3*) + 1*(*1*) / 1*(*4*) + 1*(*1*) /

$$
\begin{array}{rrrr|r}
-8 & 4 & -2 & 1 & -14 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\
0 & 12 & 6 & 9 & 18 \\
0 & 8 & 0 & 2 & 8
\end{array}
$$

Zeilentausch: (*2*) <-> (*3*) /

$$
\begin{array}{rrrr|r}
-8 & 4 & -2 & 1 & -14 \\
0 & 12 & 6 & 9 & 18 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\
0 & 8 & 0 & 2 & 8
\end{array}
$$

2. Schritt: 3*(*4*) - 2*(*2*) /

$$
\begin{array}{rrrr|r}
-8 & 4 & -2 & 1 & -14 \\
0 & 12 & 6 & 9 & 18 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\
0 & 0 & -12 & -12 & -12
\end{array}
$$

Zeilentausch: (*3*) <-> (*4*) /

$$
\begin{array}{rrrr|r}
-8 & 4 & -2 & 1 & -14 \\
0 & 12 & 6 & 9 & 18 \\
0 & 0 & -12 & -12 & -12 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -4
\end{array}
$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrl} -8a & +4b & -2c & +1d & = -14 \\ & +12b & +6c & +9d & = 18 \\ & & -12c & -12d & = -12 \\ & & & +1d & = -4 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

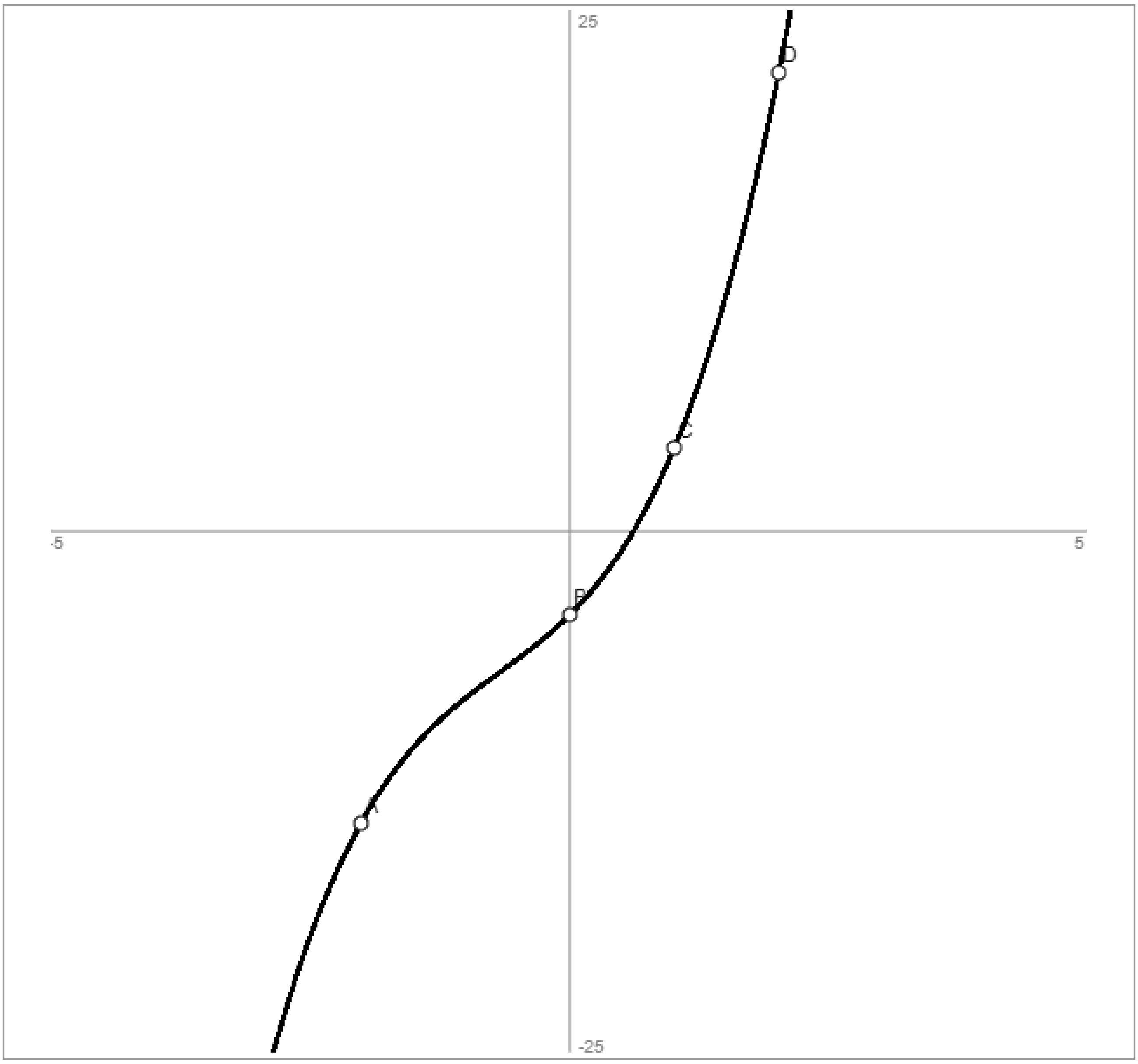
$d = -4$
$c = 5$
$b = 2$
$a = 1$

III. Funktion: $f(x) = x^3 + 2x^2 + 5x - 4$

IV. Wertetabelle, Graph: $f(x) = x^3 + 2x^2 + 5x - 4$; $f'(x) = 3x^2 + 4x + 5$; $f''(x) = 6x + 4$; $f'''(x) = 6$

Wertetabelle:					
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**f'''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-0.66	-6.7163	3.6668	0.04	6	Wendepunkt W(-0.66|-6.72)
0	-4	5	4	6	Schnittpunkt S_y(0|-4)
0.61	0.0212	8.5563	7.66	6	Nullstelle N(0.61|0.02)

Graph:



2. Lösung: I. Ganz rationale Funktion: Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Eigenschaften:

(1) Punkt A(-2|-14): $f(-2) = -14$ -> Gleichung: $a\cdot(-2)^3 + b\cdot(-2)^2 + c\cdot(-2) + d = -14$
(2) Punkt B(0|-4): $f(0) = -4$ -> Gleichung: $a\cdot 0^3 + b\cdot 0^2 + c\cdot 0 + d = -4$
(3) Punkt C(1|4): $f(1) = 4$ -> Gleichung: $a\cdot 1^3 + b\cdot 1^2 + c\cdot 1 + d = 4$
(4) Punkt D(2|22): $f(2) = 22$ -> Gleichung: $a\cdot 2^3 + b\cdot 2^2 + c\cdot 2 + d = 22$

II. Koeffizientenbestimmung: Eigenschaft (2) aus I. führt auf: $d = -4$, so dass nur noch die Koeffizienten a, b, c zu bestimmen sind. Eigenschaften (1), (3) und (4) werden mit $d = -4$ zu den Gleichungen:

(1) $-8a + 4b - 2c - 4 = -14 \Leftrightarrow -8a + 4b - 2c = -10$
(3) $a + b + c - 4 = 4 \Leftrightarrow a + b + c = 8$
(4) $8a + 4b + 2c - 4 = 22 \Leftrightarrow 8a + 4b + 2c = 26.$

Die umgestellten Gleichungen (3), (4), (1) bilden ein lineares 3x3-Gleichungssystem:

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrrrrl} + & 1a & + & 1b & + & 1c & = & 8 \\ + & 8a & + & 4b & + & 2c & = & 26 \\ - & 8a & + & 4b & - & 2c & = & -10 \end{array}$$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 8 & 4 & 2 & 26 \\ -8 & 4 & -2 & -10 \end{array}$$

1. Schritt: 1*(*2*) - 8*(*1*) / 1*(*3*) + 8*(*1*) /

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -4 & -6 & -38 \\ 0 & 12 & 6 & 54 \end{array}$$

2. Schritt: 1*(*3*) + 3*(*2*) /

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -4 & -6 & -38 \\ 0 & 0 & -12 & -60 \end{array}$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrrrl} + & 1a & + & 1b & + & 1c & = & 8 \\ & & - & 4b & - & 6c & = & -38 \\ & & & & - & 12c & = & -60 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$c = 5$
$b = 2$
$a = 1$

III. Funktion: $f(x) = x^3 + 2x^2 + 5x - 4$

www.michael-buhlmann.de / 09.2022 / Aufgabe 1705