Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Der Graph einer ganz rationalen Funktion 3. Grades verläuft durch den Hochpunkt H(0|0) und den Tiefpunkt T(6|-108). Wie lautet die Funktionsgleichung?

Lösung: I. Ganz rationale Funktion: Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Eigenschaften:

(1) Punkt H(0|0) als Nullstelle: f(0) = 0 -> Gleichung: $a\cdot0^3 + b\cdot0^2 + c\cdot0 + d = 0$
(2) Punkt H(0|0) als Hoch-/Tiefpunkt: f'(0) = 0 -> Gleichung: $3a\cdot0^2 + 2b\cdot0 + c = 0$
(3) Punkt T(6|-108): f(6) = -108 -> Gleichung: $a\cdot6^3 + b\cdot6^2 + c\cdot6 + d = -108$
(4) Punkt T(6|-108) als Hoch-/Tiefpunkt: f'(6) = 0 -> Gleichung: $3a\cdot6^2 + 2b\cdot6 + c = 0$

II. Koeffizientenbestimmung: Die Koeffizienten c, d sind aus den obigen Eigenschaften (1), (2) zum Hochpunkt H(0|0) leicht zu bestimmen:

(1) d = 0
(2) c = 0.

Es bleiben die Unbekannten a, b mit: $f(x) = ax^3 + bx^2$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx$. Wir wenden uns den Eigenschaften (3), (4) zum Tiefpunkt T(6|-108) zu und haben mit c = 0, d = 0:

(3) 216a + 36 b = -108
(4) 108a + 12b = 0.

Das lineare 2x2-Gleichungssystem ist etwa nach dem Additionsverfahren zu lösen:

216a + 36b = -108
108a + 12b = 0 | $\cdot$(-2)

216a + 36b = -108
-216a – 24b = 0 (Addition der zwei Gleichungen)

12b = -108 | :12
b = -9 -> Einsetzen -> $108a + 12\cdot(-9) = 0 \Leftrightarrow 108a - 108 = 0 \Leftrightarrow 108a = 108 \Leftrightarrow a = 1$.

III. Die (vorläufige) Funktion lautet durch Einsetzen von a = 1, b = -9, c = 0, d = 0 in den Funktionsansatz $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ damit: $f(x) = x^3 - 9x^2$. Da wir beim Hoch- und Tiefpunkt nur die Eigenschaft angewendet haben, dass dort Kurvenpunkte mit waagerechter Tangente vorliegen (f'(0) = 0, f'(6) = 0), benötigen wir noch die Probe, um nachzuweisen, dass bei H(0|0) und T(6|-108) wirklich Extrempunkte vorhanden sind. Wir bilden die (1. und) 2. Ableitung: $f(x) = x^3 - 9x^2$; $f'(x) = 3x^2 - 18x$; $f''(x) = 6x - 18$ und errechnen:

$f''(0) = 0 - 18 = -18 < 0$ => H(0|0) als relativer Hochpunkt
$f''(6) = 36 - 18 = 18 > 0$ => T(6|-108) als relativer Tiefpunkt.

Die Funktion $f(x) = x^3 - 9x^2$ erfüllt in der Tat alle geforderten Eigenschaften.

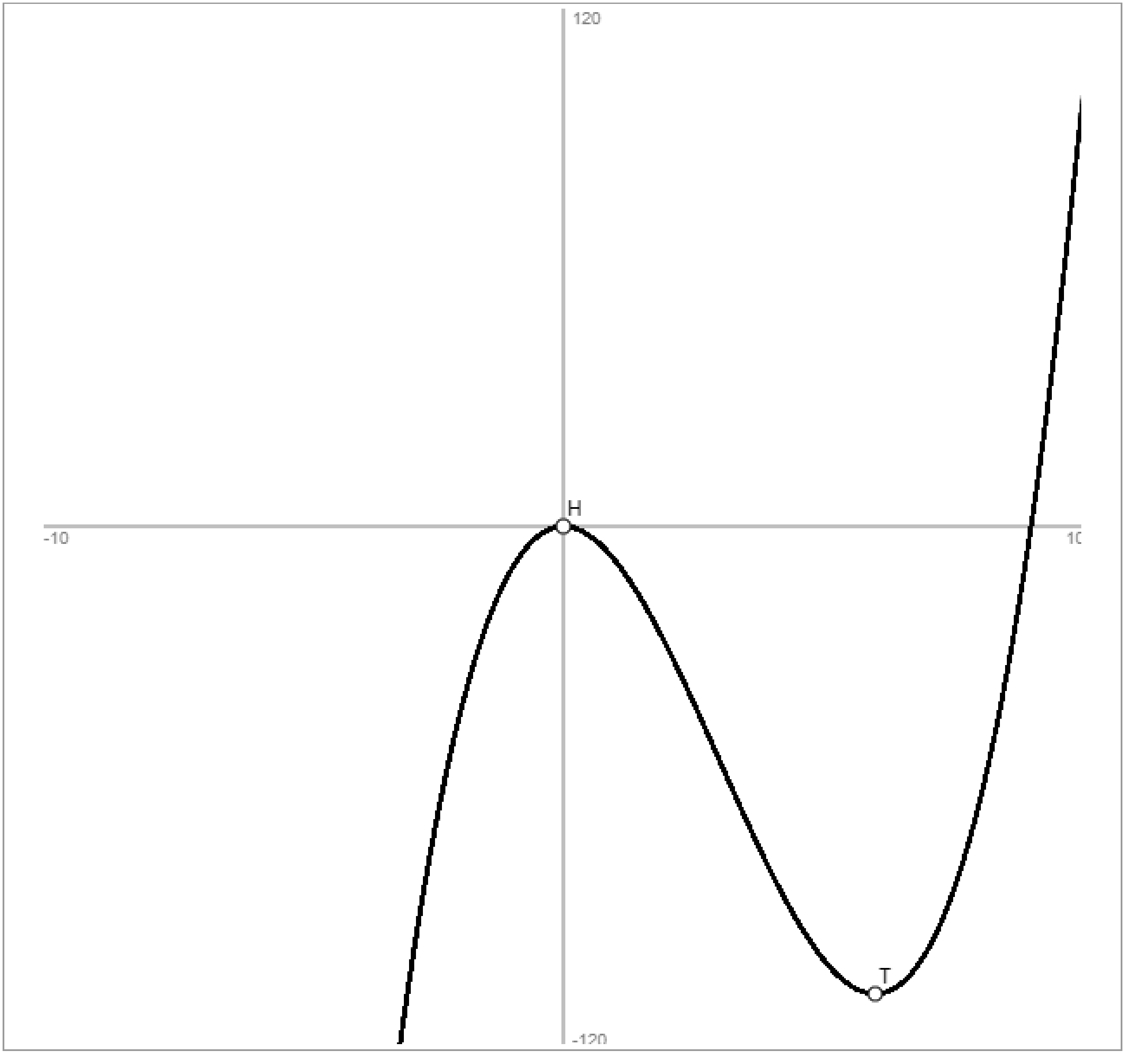
IV. Funktion: $f(x) = x^3 - 9x^2$

V. Wertetabelle, Graph: $f(x) = x^3 - 9x^2$; $f'(x) = 3x^2 - 18x$; $f''(x) = 6x - 18$; $f'''(x) = 6$

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	0	0	-18	6	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Hochpunkt H(0|0)
3	-54	-27	0	6	Wendepunkt W(3|-54)
6	-108	0	18	6	Tiefpunkt T(6|-108)
9	0	81	36	6	Nullstelle N(9|0)

Graph:



www.michael-buhlmann.de / 10.2022 / Aufgabe 1706