Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Der Graph einer ganz rationalen Funktion 3. Grades besitzt den Wendepunkt S(0|-5). Die Kurve verläuft im x-y-Koordinatensystem durch den Punkt P(2|11) und hat dort die Steigung 12. Wie lautet die Funktionsgleichung?

Lösung: I. <u>Ganz rationale Funktion</u>: Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $f''(x) = 6ax + 2b$

Eigenschaften:

(1) Punkt W(0|-5): $f(0) = -5$ -> Gleichung: $a\cdot 0^3 + b\cdot 0^2 + c\cdot 0 + d = -5$
(2) Punkt W(0|-5) als Wendepunkt: $f''(0) = 0$ -> Gleichung: $6a\cdot 0 + 2b = 0$
(3) Punkt P(2|11): $f(2) = 11$ -> Gleichung: $a\cdot 2^3 + b\cdot 2^2 + c\cdot 2 + d = 11$
(4) Punkt P(2|11): $f'(2) = 12$ -> Gleichung: $3a\cdot 2^2 + 2b\cdot 2 + c = 12$

II. <u>Koeffizientenbestimmung</u>: 4x4-Gleichungssystem (Dreiecksgestalt)

<u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$$\begin{array}{rrrrcr} & & & +\ 1d & = & -5 \\ & +\ 2b & & & = & 0 \\ +\ 8a & +\ 4b & +\ 2c & +\ 1d & = & 11 \\ +\ 12a & +\ 4b & +\ 1c & & = & 12 \end{array}$$

<u>Anfangstableau</u>:

$$\begin{array}{rrrr|r} 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 11 \\ 12 & 4 & 1 & 0 & 12 \end{array}$$

<u>Zeilentausch</u>: (*1*) <-> (*3*) /

$$\begin{array}{rrrr|r} 8 & 4 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 12 & 4 & 1 & 0 & 12 \end{array}$$

<u>1. Schritt</u>: 2*(*4*) - 3*(*1*) /

$$\begin{array}{rrrr|r} 8 & 4 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & -4 & -4 & -3 & -9 \end{array}$$

<u>2. Schritt</u>: 1*(*4*) + 2*(*2*) /

$$\begin{array}{rrrr|r} 8 & 4 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & -9 \end{array}$$

Zeilentausch: (*3*) <-> (*4*) /

$$\begin{array}{cccc|c} 8 & 4 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrcr} +8a & +4b & +2c & +1d & = & 11 \\ & +2b & & & = & 0 \\ & & -4c & -3d & = & -9 \\ & & & +1d & = & -5 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$d = -5$
$c = 6$
$b = 0$
$a = 0.5$

III. Probe: Funktion und Ableitungen $f(x) = 0.5x^3 + 6x - 5$; $f'(x) = 1.5x^2 + 6$; $f''(x) = 3x$; $f'''(x) = 3$ führen auf: $f''(0) = 3 \cdot 0 = 0$, $f'''(0) = 3 \neq 0$, so dass die errechnete Funktion bei W(0|-5) einen Wendepunkt hat.

IV. Funktion: $f(x) = 0.5x^3 + 6x - 5$

V. Wertetabelle, Graph: $f(x) = 0.5x^3 + 6x - 5$; $f'(x) = 1.5x^2 + 6$; $f''(x) = 3x$; $f'''(x) = 3$

Wertetabelle:

x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**f'''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
0	-5	6	0	3	Schnittpunkt S_y(0|-5) = Wendepunkt W(0|-5)
0.8	0.056	6.96	2.4	3	Nullstelle N(0.8|0.06)

Graph: