Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Der Graph einer ganz rationalen Funktion 3. Grades besitzt den Sattelpunkt S(1|3) und schneidet die y-Achse des x-y-Koordinatensystems bei 2. Wie lautet die Funktionsgleichung?

Lösung: I. Ganz rationale Funktion: Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $f''(x) = 6ax + 2b$

Eigenschaften:

(1) Sattelpunkt als Punkt S(1|3): f(1) = 3 -> Gleichung: $a\cdot 1^3 + b\cdot 1^2 + c\cdot 1 + d = 3$
(2) Sattelpunkt S(1|3) mit waagerechter Tangente: f'(1) = 0 -> Gleichung: $3a\cdot 1^2 + 2b\cdot 1 + c = 0$
(3) Sattelpunkt S(1|3) als Wendepunkt: f''(1) = 0 -> Gleichung: $6a\cdot 1 + 2b = 0$
(4) Schnittpunkt mit y-Achse P(0|2): f(0) = 2 -> Gleichung: $a\cdot 0^3 + b\cdot 0^2 + c\cdot 0 + d = 2$

II. Koeffizientenbestimmung: 4x4-Gleichungssystem (Dreiecksgestalt)

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrl} +1a & +1b & +1c & +1d & = 3 \\ +3a & +2b & +1c & & = 0 \\ +6a & +2b & & & = 0 \\ & & & +1d & = 2 \end{array}$$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

1. Schritt: 1*(*2*) - 3*(*1*) / 1*(*3*) - 6*(*1*) /

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -9 \\ 0 & -4 & -6 & -6 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

2. Schritt: -1*(*3*) + 4*(*2*) /

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrl} +1a & +1b & +1c & +1d & = 3 \\ & -1b & -2c & -3d & = -9 \\ & & -2c & -6d & = -18 \\ & & & +1d & = 2 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$d = 2$
$c = 3$
$b = -3$
$a = 1$

III. Probe: Es ist: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$, $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$, $f''(x) = 6x – 6$, $f'''(x) = 6$, so dass wegen: $f'(1) = 3-6+3 = 0$, $f''(1) = 6-6 = 0$, $f'''(0) = 6 \neq 0$ der Punkt S(1|3) in der Tat ein Sattelpunkt der Funktion ist.

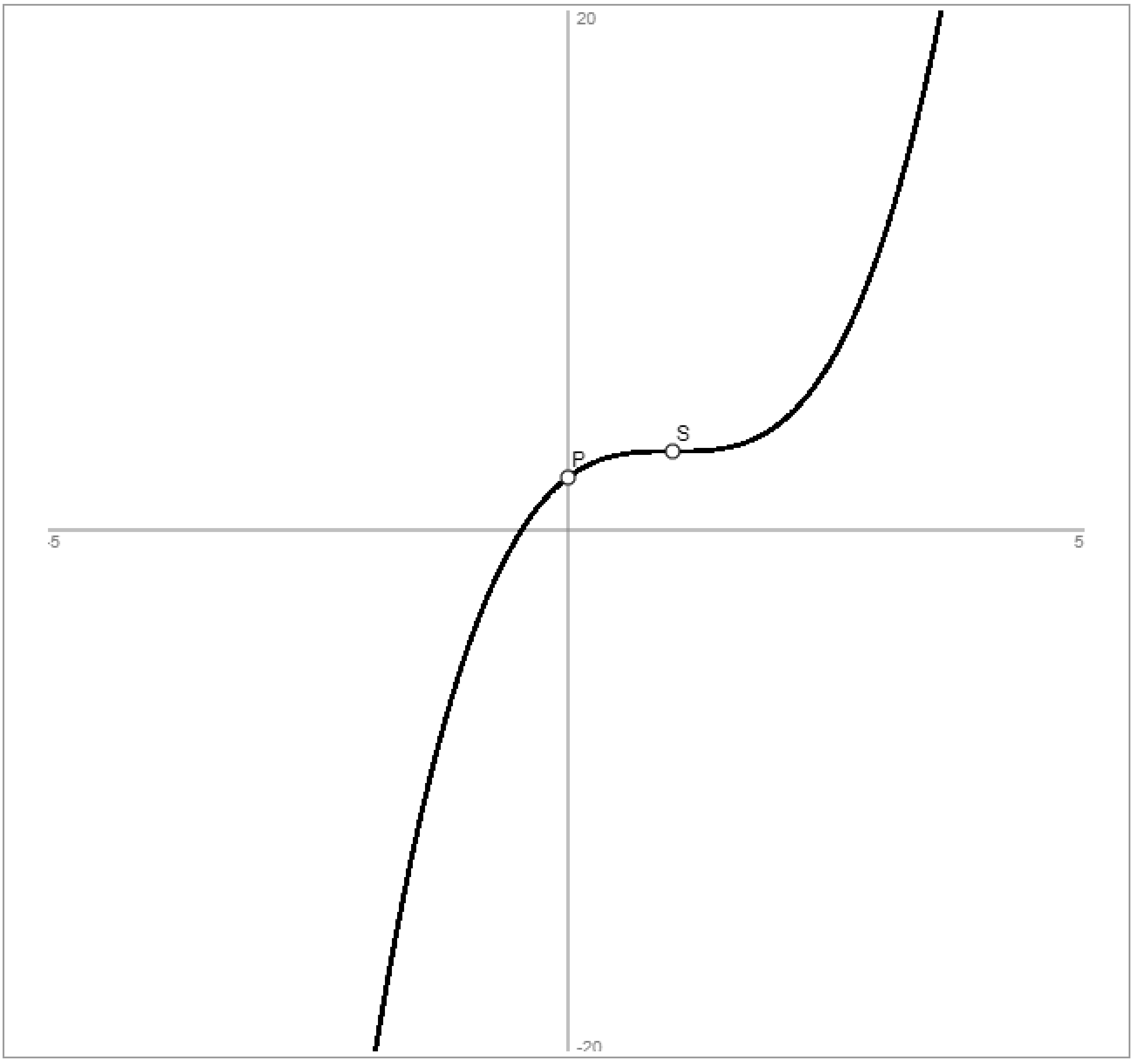
IV. Funktion: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$

V. Wertetabelle, Graph: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$; $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$; $f''(x) = 6x - 6$; $f'''(x) = 6$

Wertetabelle:

x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**f'''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-0.44	0.014	6.2208	-8.64	6	Nullstelle N(-0.44|0.01)
0	2	3	-6	6	Schnittpunkt $S_y(0\|2)$
1	3	0	0	6	Sattelpunkt $W_S(1\|3)$

Graph:



www.michael-buhlmann.de / 10.2022 / Aufgabe 1708