Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Der Graph einer ganz rationalen Funktion 3. Grades besitzt den Hochpunkt H(-2|8/3) und den Wendepunkt W(-1|1). Wie lautet die Funktionsgleichung?

Lösung: I. Ganz rationale Funktion: Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $f''(x) = 6ax + 2b$

Eigenschaften:

(1) Punkt H(-2|8/3): f(-2) = 8/3 -> Gleichung: $a\cdot(-2)^3 + b\cdot(-2)^2 + c\cdot(-2) + d = 8/3$
(2) Punkt H(-2|8/3) als Hoch-/Tiefpunkt: f'(-2) = 0 -> Gleichung: $3a\cdot(-2)^2 + 2b\cdot(-2) + c = 0$
(3) Punkt W(-1|1): f(-1) = 1 -> Gleichung: $a\cdot(-1)^3 + b\cdot(-1)^2 + c\cdot(-1) + d = 1$
(4) Punkt W(-1|1) als Wendepunkt: f''(-1) = 0 -> Gleichung: $6a\cdot(-1) + 2b = 0$.

Multiplikation der Gleichung (1) mit der Zahl 3 führt auf Ganzzahligkeit:

(1) $-24a + 12b - 6c + 3d = 8$
(2) $12a - 4b + c = 0$
(3) $-a + b - c + d = 1$
(4) $-6a + 2b = 0$

II. Koeffizientenbestimmung: 4x4-Gleichungssystem (vertauschte Gleichungen, Dreiecksgestalt)

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrr} -1a & +1b & -1c & +1d & =1 \\ -6a & +2b & & & =0 \\ +12a & -4b & +1c & & =0 \\ -24a & +12b & -6c & +3d & =8 \end{array}$$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -24 & 12 & -6 & 3 & 8 \end{array}$$

1. Schritt: -1*(*2*) + 6*(*1*) / 1*(*3*) + 12*(*1*) / -1*(*4*) + 24*(*1*) /

$$\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & 6 & 6 \\ 0 & 8 & -11 & 12 & 12 \\ 0 & 12 & -18 & 21 & 16 \end{array}$$

2. Schritt: 1*(*3*) - 2*(*2*) / 1*(*4*) - 3*(*2*) /

$$\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \end{array}$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrl} -1a & +1b & -1c & +1d & = 1 \\ & +4b & -6c & +6d & = 6 \\ & & +1c & & = 0 \\ & & & +3d & = -2 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$d = -2/3$
$c = 0$
$b = 2.5$
$a = 5/6$

III. Probe: Es ist: $f(x) = 5x^3/6 + 2.5x^2 - 2/3$, $f'(x) = 2.5x^2 + 5x$; $f''(x) = 5x + 5$, $f'''(x) = 5$, so dass wegen: $f'(-2) = 10-10 = 0$, $f''(-2) = -10+5 = -5 < 0$, $f''(-1) = -5+5 = 0$, $f'''(-1) = 5 \neq 0$ Hochpunkt und Wendepunkt an der geforderten Stellen der Funktion vorliegen.

IV. Funktion: $f(x) = 5x^3/6 + 2.5x^2 - 2/3$

V. Wertetabelle, Graph: $f(x) = 5x^3/6 + 2.5x^2 - 2/3$; $f'(x) = 2.5x^2 + 5x$; $f''(x) = 5x + 5$; $f'''(x) = 5$

Wertetabelle:

x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**f'''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-2.9	0.0342	6.525	-9.5	5	Nullstelle N(-2.9|0.03)
-2	2.6667	0	-5	5	Hochpunkt H(-2|2.67)
-1	1	-2.5	0	5	Wendepunkt W(-1|1)
-0.57	-0.0087	-2.0378	2.15	5	Nullstelle N(-0.57|-0.01)
0	-0.6667	0	5	5	Schnittpunkt S_y(0|-0.67) = Tiefpunkt T(0|-0.67)
0.48	0.0015	2.976	7.4	5	Nullstelle N(0.48|0)

Graph: