Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Der Graph einer ganz rationalen Funktion 3. Grades ist punktsymmetrisch zum Ursprung O(0|0) des x-y-Koordinatensystems und besitzt einen Hochpunkt H(-2|16). Wie lautet die Funktionsgleichung?

Lösung: I. Ganz rationale Funktion: Der Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ verändert sich wegen der Punktsymmetrie von f(x) zum Ursprung O(0|0) des x-y-Koordinatensystems – nur ungerade ganz rationale Potenzen sind vorhanden – zu: $(x) = ax^3 + cx$, $f'(x) = 3ax^2 + c$.

Eigenschaften:

(1) Punkt H(-2|16): $f(-2) = 16$ -> Gleichung: $a\cdot(-2)^3 + c\cdot(-2) = 16$
(2) Punkt H(-2|16) als Hoch-/Tiefpunkt: $f'(-2) = 0$ -> Gleichung: $3a\cdot(-2)^2 + c = 0$

II. Koeffizientenbestimmung: Es ergibt sich lineares Gleichungssystem aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Wir rechnen:

$-8a - 2c = 16$	$\mid :2$
$12a + c = 0$	
$-4a - c = 8$	
$12a + c = 0$	(Addition der beiden Gleichungen)
$8a = 8$	$\mid :8$

$a = 1$-> Einsetzen -> $12\cdot 1 + c = 0 \Leftrightarrow 12 + c = 0 \Leftrightarrow c = -12$.

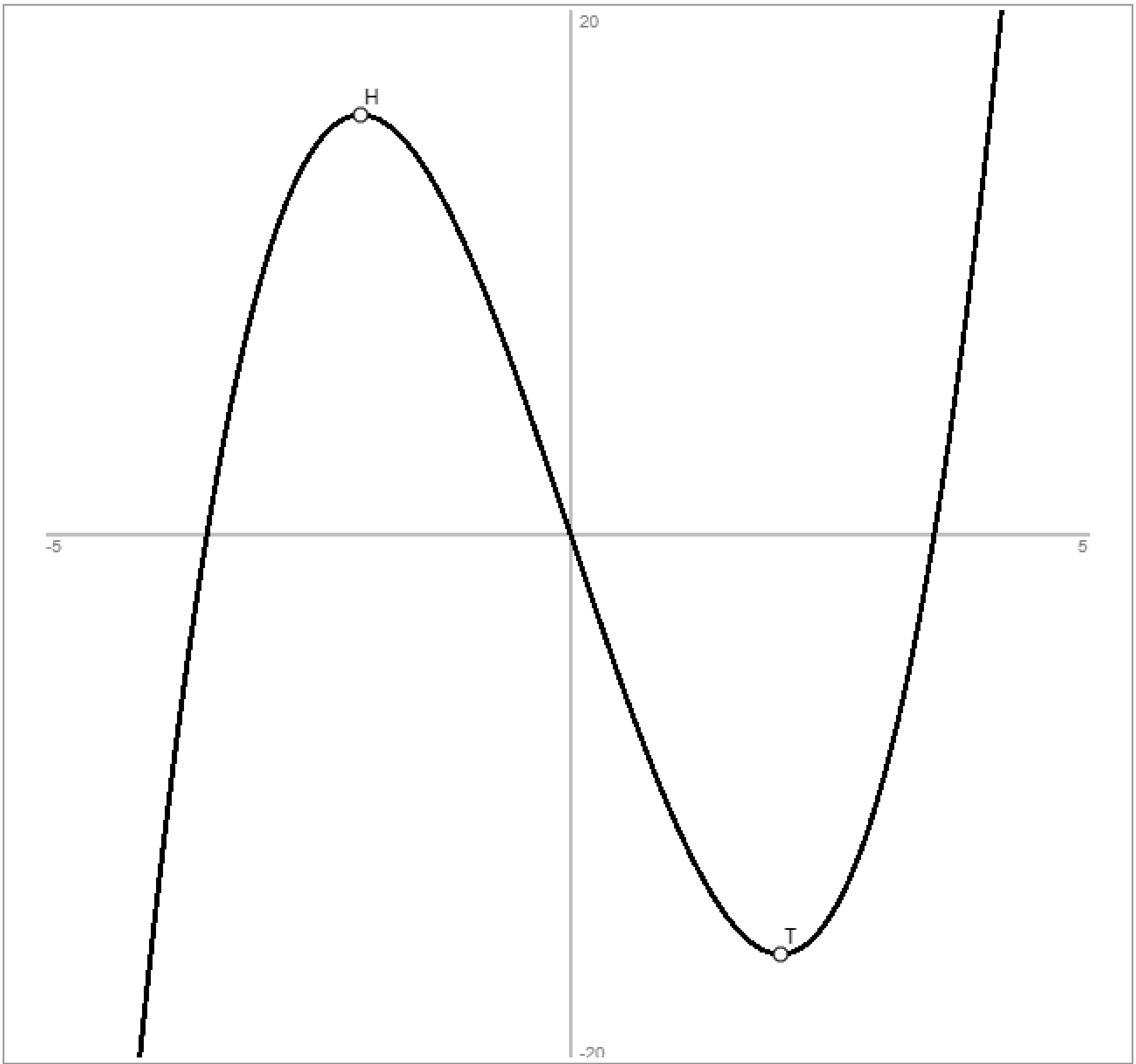
III. Probe: Es ist: $f(x) = x^3 - 12x$, $f'(x) = 3x^2 - 12$, $f''(x) = 6x$, so dass wegen: $f'(-2) = 3\cdot 2^2-12 = 0$, $f''(-2) = 6\cdot(-2) = -12 < 0$ der verlangte Hochpunkt vorliegt.

IV. Funktion: $f(x) = x^3 - 12x$

V. Wertetabelle, Graph: $f(x) = x^3 - 12x$; $f'(x) = 3x^2 - 12$; $f''(x) = 6x$

Wertetabelle:					
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**f'''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-3.46	0.0983	23.9148	-20.76	6	Nullstelle N(-3.46|0.1)
-2	16	0	-12	6	Hochpunkt H(-2|16)
0	0	-12	0	6	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Wendepunkt W(0|0)
2	-16	0	12	6	Tiefpunkt T(2|-16)
3.47	0.1419	24.1227	20.82	6	Nullstelle N(3.47|0.14)

Graph:



www.michael-buhlmann.de / 10.2022 / Aufgabe 1710