Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Der Graph einer ganz rationalen Funktion 4. Grades besitzt im Ursprung die Steigung -8, hat bei x = 2 eine Nullstelle und verläuft im x-y-Koordinatensystem durch die Punkte P(-2|32) und Q(1|-7). Wie lautet die Funktionsgleichung?

1. Lösung: I. Ganz rationale Funktion: Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

Eigenschaften:

(1) Punkt O(0|0) als Nullstelle: f(0) = 0 -> Gleichung: $a\cdot 0^4 + b\cdot 0^3 + c\cdot 0^2 + d\cdot 0 + e = 0$
(2) Punkt O(0|0): f'(0) = -8 -> Gleichung: $4a\cdot 0^3 + 3b\cdot 0^2 + 2c\cdot 0 + d = -8$
(3) Punkt N(2|0) als Nullstelle: f(2) = 0 -> Gleichung: $a\cdot 2^4 + b\cdot 2^3 + c\cdot 2^2 + d\cdot 2 + e = 0$
(4) Punkt P(-2|32): f(-2) = 32 -> Gleichung: $a\cdot(-2)^4 + b\cdot(-2)^3 + c\cdot(-2)^2 + d\cdot(-2) + e = 32$
(5) Punkt Q(1|-7): f(1) = -7 -> Gleichung: $a\cdot 1^4 + b\cdot 1^3 + c\cdot 1^2 + d\cdot 1 + e = -7$

II. Koeffizientenbestimmung: 5x5-Gleichungssystem (Dreiecksgestalt)

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrrcr}
 & & & & +1e & = & 0 \\
 & & & +1d & & = & -8 \\
+16a & +8b & +4c & +2d & +1e & = & 0 \\
+16a & -8b & +4c & -2d & +1e & = & 32 \\
+1a & +1b & +1c & +1d & +1e & = & -7
\end{array}$$

Anfangstableau:

0	0	0	0	1	|	0
0	0	0	1	0	|	-8
16	8	4	2	1	|	0
16	-8	4	-2	1	|	32
1	1	1	1	1	|	-7

Zeilentausch: (*1*) <-> (*3*) /

16	8	4	2	1	|	0
0	0	0	1	0	|	-8
0	0	0	0	1	|	0
16	-8	4	-2	1	|	32
1	1	1	1	1	|	-7

1. Schritt: 1*(*4*) - 1*(*1*) / 16*(*5*) - 1*(*1*) /

16	8	4	2	1	|	0
0	0	0	1	0	|	-8
0	0	0	0	1	|	0
0	-16	0	-4	0	|	32
0	8	12	14	15	|	-112

Zeilentausch: (*2*) <-> (*4*) /

16	8	4	2	1	|	0
0	-16	0	-4	0	|	32
0	0	0	0	1	|	0
0	0	0	1	0	|	-8
0	8	12	14	15	|	-112

2. Schritt: 2*(*5*) + 1*(*2*) /

16	8	4	2	1	|	0
0	-16	0	-4	0	|	32
0	0	0	0	1	|	0
0	0	0	1	0	|	-8
0	0	24	24	30	|	-192

Zeilentausch: (*3*) <-> (*5*) /

16	8	4	2	1	|	0
0	-16	0	-4	0	|	32
0	0	24	24	30	|	-192
0	0	0	1	0	|	-8
0	0	0	0	1	|	0

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrcr}
+16a & +8b & +4c & +2d & +1e & = & 0 \\
 & -16b & & -4d & & = & 32 \\
 & & +24c & +24d & +30e & = & -192 \\
 & & & +1d & & = & -8 \\
 & & & & +1e & = & 0
\end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$e = 0$
$d = -8$
$c = 0$
$b = 0$
$a = 1$

III. Funktion: $f(x) = x^4 - 8x$

2. Lösung: I. Ganz rationale Funktion: Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$,
$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

Eigenschaften:

(1) Punkt O(0|0) als Nullstelle: f(0) = 0 -> Gleichung: $a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e = 0$
(2) Punkt O(0|0): f'(0) = -8 -> Gleichung: $4a \cdot 0^3 + 3b \cdot 0^2 + 2c \cdot 0 + d = -8$
(3) Punkt N(2|0) als Nullstelle: f(2) = 0 -> Gleichung: $a \cdot 2^4 + b \cdot 2^3 + c \cdot 2^2 + d \cdot 2 + e = 0$
(4) Punkt P(-2|32): f(-2) = 32 -> Gleichung: $a \cdot (-2)^4 + b \cdot (-2)^3 + c \cdot (-2)^2 + d \cdot (-2) + e = 32$
(5) Punkt Q(1|-7): f(1) = -7 -> Gleichung: $a \cdot 1^4 + b \cdot 1^3 + c \cdot 1^2 + d \cdot 1 + e = -7$

II. Koeffizientenbestimmung: Gleichung (1) führt auf: e = 0, Gleichung (2) auf d = -8, so dass nur noch die drei Koeffizienten a, b, c mit den Gleichungen (3), (4), (5) zu bestimmen sind. Die Gleichungen werden mit e = 0, d = -8 zu:

(3): $16a + 8b + 4c - 16 + 0 = 0 \Leftrightarrow 16a + 8b + 4c = 16 \Leftrightarrow 4a + 2b + c = 4$
(4): $16a - 8b + 4c + 16 + 0 = 32 \Leftrightarrow 16a - 8b + 4c = 16 \Leftrightarrow 4a - 2b + c = 4$
(5): $a + b + c - 8 + 0 = -7 \Leftrightarrow a + b + c = 1$

Es ergibt sich ein lineares 3x3-Gleichungssystem (Dreiecksgestalt):

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} +1a + 1b + 1c &= 1 \\ +4a + 2b + 1c &= 4 \\ +4a - 2b + 1c &= 4 \end{aligned}$$

Anfangstableau:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

1. Schritt: 1*(*2*) - 4*(*1*) / 1*(*3*) - 4*(*1*) /

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

2. Schritt: -1*(*3*) + 3*(*2*) /

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} +1a + 1b + 1c &= 1 \\ -2b - 3c &= 0 \\ -6c &= 0 \end{aligned}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

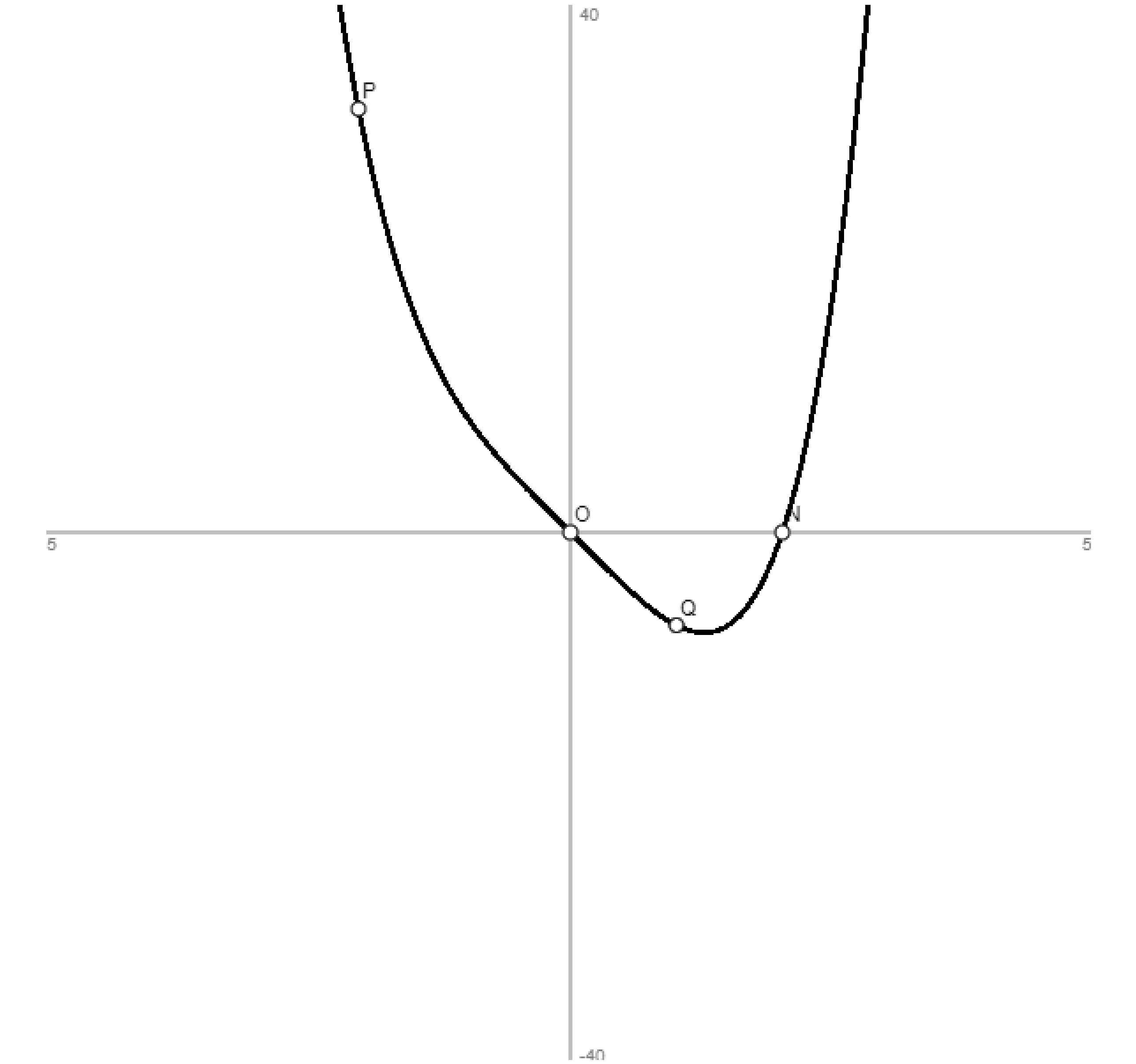
$c = 0$
$b = 0$
$a = 1$

III. Funktion: $f(x) = x^4 - 8x$

IV. Wertetabelle, Graph: $f(x) = x^4 - 8x$; $f'(x) = 4x^3 - 8$; $f''(x) = 12x^2$; $f'''(x) = 24x$

Wertetabelle:					
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**f'''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
0	0	-8	0	0	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0)
1.26	-7.5595	0.0015	19.0512	30.24	Tiefpunkt T(1.26|-7.56)
2	0	24	48	48	Nullstelle N(2|0)

Graph:



www.michael-buhlmann.de / 10.2022 / Aufgabe 1711