Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Der Graph einer ganz rationalen Funktion 3. Grades besitzt einen Wendepunkt bei x = -3, hat an der Stelle x = -7 die Steigung m = -18 und im Punkt P(-2|1) die Steigung m = 4,5. Wie lautet die Funktionsgleichung?

Lösung: I. <u>Ganz rationale Funktion</u>: Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Eigenschaften:

(1) Stelle x = -3 als Wendestelle: f''(-3) = 0 -> Gleichung: $6a\cdot(-3) + 2b = 0$
(2) Stelle x = -7: f'(-7) = -18 -> Gleichung: $3a\cdot(-7)^2 + 2b\cdot(-7) + c = -18$
(3) Punkt P(-2|1): f(-2) = 1 -> Gleichung: $a\cdot(-2)^3 + b\cdot(-2)^2 + c\cdot(-2) + d = 1$
(4) Punkt P(-2|1): f'(-2) = 4.5 -> Gleichung: $3a\cdot(-2)^2 + 2b\cdot(-2) + c = 4.5$

II. <u>Koeffizientenbestimmung</u>: 4x4-Gleichungssystem (Dreiecksgestalt)

<u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrr}
- & 18a & + & 2b & & & & & = & 0 \\
+ & 147a & - & 14b & + & 1c & & & = & -18 \\
- & 8a & + & 4b & - & 2c & + & 1d & = & 1 \\
+ & 12a & - & 4b & + & 1c & & & = & 4.5
\end{array}
$$

<u>Anfangstableau</u>:

-18	2	0	0	|	0
147	-14	1	0	|	-18
-8	4	-2	1	|	1
12	-4	1	0	|	4.5

<u>1. Schritt</u>: 6*(*2*) + 49*(*1*) / -9*(*3*) + 4*(*1*) / 3*(*4*) + 2*(*1*) /

-18	2	0	0	|	0
0	14	6	0	|	-108
0	-28	18	-9	|	-9
0	-8	3	0	|	13.5

<u>2. Schritt</u>: 1*(*3*) + 2*(*2*) / 7*(*4*) + 4*(*2*) /

-18	2	0	0	|	0
0	14	6	0	|	-108
0	0	30	-9	|	-225
0	0	45	0	|	-337.5

<u>3. Schritt</u>: 2*(*4*) - 3*(*3*) /

-18	2	0	0	|	0
0	14	6	0	|	-108
0	0	30	-9	|	-225
0	0	0	27	|	0

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrcr} -18a & +2b & & & = & 0 \\ & +14b & +6c & & = & -108 \\ & & +30c & -9d & = & -225 \\ & & & +27d & = & 0 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$d = 0$
$c = -7.5$
$b = -4.5$
$a = -0.5$

III. Funktion: $f(x) = -0.5x^3 - 4.5x^2 - 7.5x$; $f'(x) = -1.5x^2 - 9x - 7.5$; $f''(x) = -3x - 9$; $f'''(x) = -3$.

IV. Probe: Wegen des Wendepunktes bei x = -3 und der Verwendung der Bedingung f“(-3) = 0 ist noch festzustellen, ob tatsächlich ein Wendepunkt vorliegt. Dies ergibt sich aber aus der vorausgesetzten ganz rationalen Funktion 3. Grades, die immer einen Wendepunkt besitzt, oder aus der Tatsache, dass f‘“(-3) = -3 ≠ 0 ist.

V. Wertetabelle, Graph: $f(x) = -0.5x^3 - 4.5x^2 - 7.5x$; $f'(x) = -1.5x^2 - 9x - 7.5$; $f''(x) = -3x - 9$; $f'''(x) = -3$

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-6.79	0	-15.5461	11.37	-3	Nullstelle N(-6.79|0)
-5	-12.5	0	6	-3	Tiefpunkt T(-5|-12.5)
-3	-4.5	6	0	-3	Wendepunkt W(-3|-4.5)
-2.2	0	5.04	-2.4	-3	Nullstelle N(-2.2|0)
-1	3.5	0	-6	-3	Hochpunkt H(-1|3.5)
0	0	-7.5	-9	-3	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0)

Graph: