

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Gesucht sind alle ganz rationalen Funktion höchstens vom Grad 6, die zur symmetrisch zur y-Achse sind und an den Stellen $x = \pm 3$ Sattelpunkte besitzen.

Lösung: I. Wir bestimmen zunächst eine ganz rationale, zur y-Achse symmetrische Funktion $h(x)$, deren Sattelpunkte an den Stellen $x = \pm 3$ Nullstellen der Funktion sind. Die Sattelpunkte $S_1(-3|0)$ und $S_2(3|0)$ stellen dreifache Nullstellen dar, so dass für $h(x)$ die folgende Linearfaktorzerlegung (mit Verwendung der 3. binomischen Formel) greift:

$$h(x) = (x+3)^3(x-3)^3 = [(x+3)(x-3)]^3 = (x^2-9)^3.$$

Die Funktion ist ganz rational vom Grad 6 und zudem zur y-Achse symmetrisch, da der Term x^2-9 achsensymmetrisch ist und das Produkt $(x^2-9)^3$ aus achsensymmetrischen Funktionen wieder symmetrisch zur y-Achse ist.

II. Alle ganz rationalen, zur y-Achse symmetrischen Funktionen $f(x)$ mit Sattelpunkten $x = \pm 3$ lassen sich folglich als entlang der y-Achse verschobene, (gestreckte, gestauchte, gespiegelte) Vielfache der Funktion $h(x)$ auffassen:

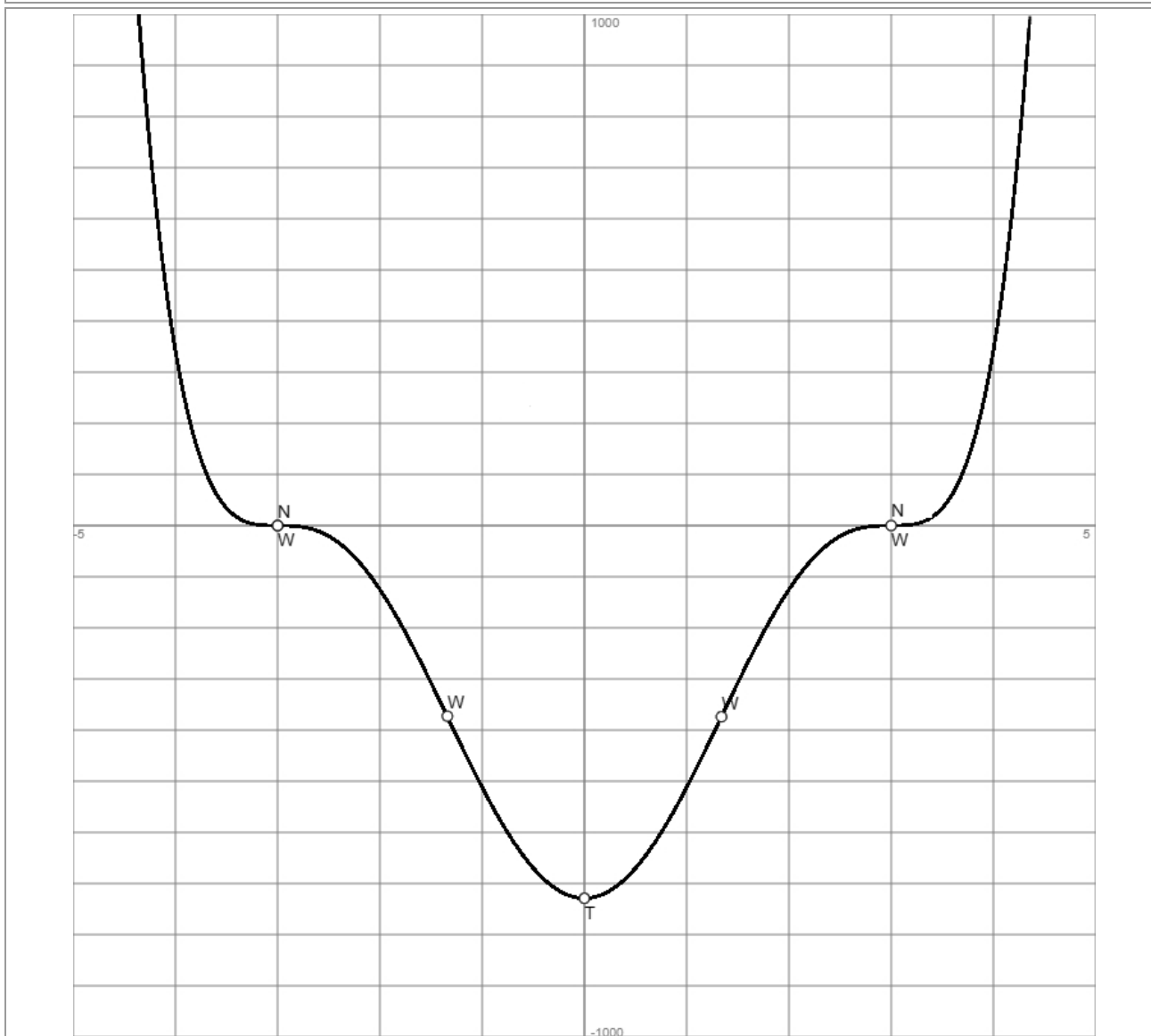
$$f(x) = a \cdot h(x) + c = a(x^2-9)^3 + c.$$

III. Wertetabelle, Graph: $h(x) = (x^2-9)^3$

Wertetabelle:				
x	h(x)	h'(x)	h''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-5	4096	-7680.01	11136	
-4.5	1423.8281	-3417.2	6226.88	
-4	343	-1176.01	2982	
-3.5	34.3281	-221.82	1018.88	
-3	0	0	0	Nullstelle N(-3 0) = Wendepunkt W(-3 0) = Sattelpunkt S(-3 0)
-2.5	-20.7969	-113.44	-367.12	
-2	-125	-300	-330	
-1.5	-307.5469	-410.06	-91.12	
-1.3425	-372.8894	-417.3	-0.5	Wendepunkt W(-1.34 -372.89)
-1	-512	-384	192	
-0.5	-669.9219	-229.69	406.87	
0	-729	0	486	Schnittpunkt $S_y(0 -729)$ = Tiefpunkt T(0 -729)
0.5	-669.9219	229.69	406.87	
1	-512	384	192	
1.34	-373.9327	417.3	0.95	Wendepunkt W(1.34 -373.93)
1.5	-307.5469	410.06	-91.12	
2	-125	300	-330	
2.5	-20.7969	113.44	-367.12	
3	0	0	0	Nullstelle N(3 0) = Wendepunkt W(3 0) = Sattelpunkt S(3 0)
3.5	34.3281	221.82	1018.88	

4	343	1176.01	2982	
4.5	1423.8281	3417.2	6226.88	
5	4096	7680.01	11136	

Graph:

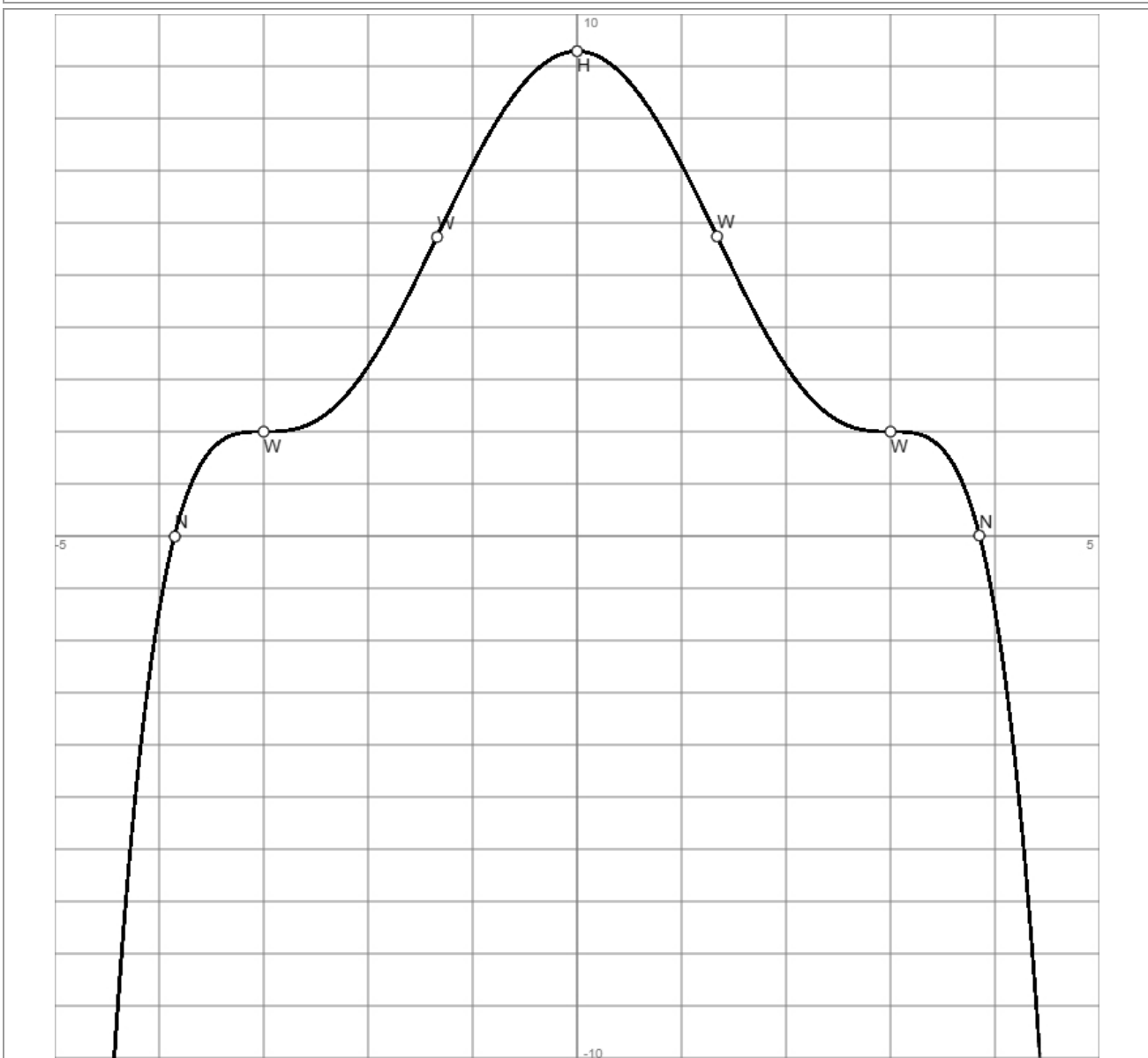


IV. Wertetabelle, Graph: $f(x) = -(x^2-9)^3/100 + 2$ ($a = -1/100$, $c = 2$)

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-5	-38.96	76.8	-111.36	
-4.5	-12.2383	34.17	-62.27	
-4	-1.43	11.76	-29.82	
-3.855	-0.0134	7.95	-22.97	Nullstelle N(-3.85 0)
-3.5	1.6567	2.22	-10.19	
-3	2	0	0	Wendepunkt W(-3 2) = Sattelpunkt S(-3 2)
-2.5	2.208	1.13	3.67	
-2	3.25	3	3.3	
-1.5	5.0755	4.1	0.91	
-1.3425	5.7289	4.17	0	Wendepunkt W(-1.34 5.73)
-1	7.12	3.84	-1.92	

-0.5	8.6992	2.3	-4.07	
0	9.29	0	-4.86	Schnittpunkt $S_y(0 9.29) = \text{Hochpunkt } H(0 9.29)$
0.5	8.6992	-2.3	-4.07	
1	7.12	-3.84	-1.92	
1.34	5.7393	-4.17	-0.01	Wendepunkt $W(1.34 5.74)$
1.5	5.0755	-4.1	0.91	
2	3.25	-3	3.3	
2.5	2.208	-1.13	3.67	
3	2	0	0	Wendepunkt $W(3 2) = \text{Sattelpunkt } S(3 2)$
3.5	1.6567	-2.22	-10.19	
3.8525	0.0064	-7.89	-22.86	Nullstelle $N(3.85 0)$
4	-1.43	-11.76	-29.82	
4.5	-12.2383	-34.17	-62.27	
5	-38.96	-76.8	-111.36	

Graph:



www.michael-buhlmann.de / 01.2023 / Aufgabe 1766