Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Gesucht werden alle quadratischen $f(x) = ax^2 + bx + c$, deren Graphen durch die Punkte P(-2|4) und Q(1|-2) verlaufen. Gib die Funktionenschar in Abhängigkeit vom Parameter a an.

Lösung: I. <u>Ansatz</u>: Die Gleichung der gesuchten Funktion f(x) ist laut Aufgabenstellung:

$f(x) = ax^2 + bx + c$.

Da mit den vorgegebenen Punkten P und Q den drei zu ermittelnden Unbekannten a, b, c nur zwei Eigenschaften der Funktion gegenüberstehen, erhalten wir im Falle der Lösbarkeit eine Funktionenschar von Parameterfunktionen mit der Unbekannten a als Parameter. Aus f(x) wird somit $f_a(x)$ für beliebige reelle a.

II. <u>Einsetzen</u> der Funktionseigenschaften führt zunächst auf:

Punkt P(-2|4): f(-2) = 4 -> Gleichung: $a\cdot(-2)^2 + b\cdot(-2) + c = 4$
Punkt Q(1|-2): f(1) = -2 -> Gleichung: $a\cdot1^2 + b\cdot1 + c = -2$.

III. <u>Koeffizientenbestimmung</u>: Das lineare Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und drei Unbekannten wird – wegen a als vorgesehenen Parameter – von den Spalten her (umgekehrt) nach c, b, a geordnet, so dass die Anfangsgleichungen wie folgt lauten:

$c – 2b + 4a = 4$
$c + b + a = -2$.

Es ergibt sich als lineares Gleichungssystem und Lösung mit dem Gauß-Verfahren:

<u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$+ 1c - 2b + 4a = 4$

$+ 1c + 1b + 1a = -2$

<u>Anfangstableau</u>:

c	*b*	*a*	|	*R.S.*
1	-2	4	|	4
1	1	1	|	-2

<u>1. Schritt</u>: 1*(*2*) - 1*(*1*) /

1	-2	4	|	4
0	3	-3	|	-6

<u>Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems</u>:

$+ 1c - 2b + 4a = 4$

$+ 3b - 3a = -6$

<u>Lösungen des linearen Gleichungssystems</u>:

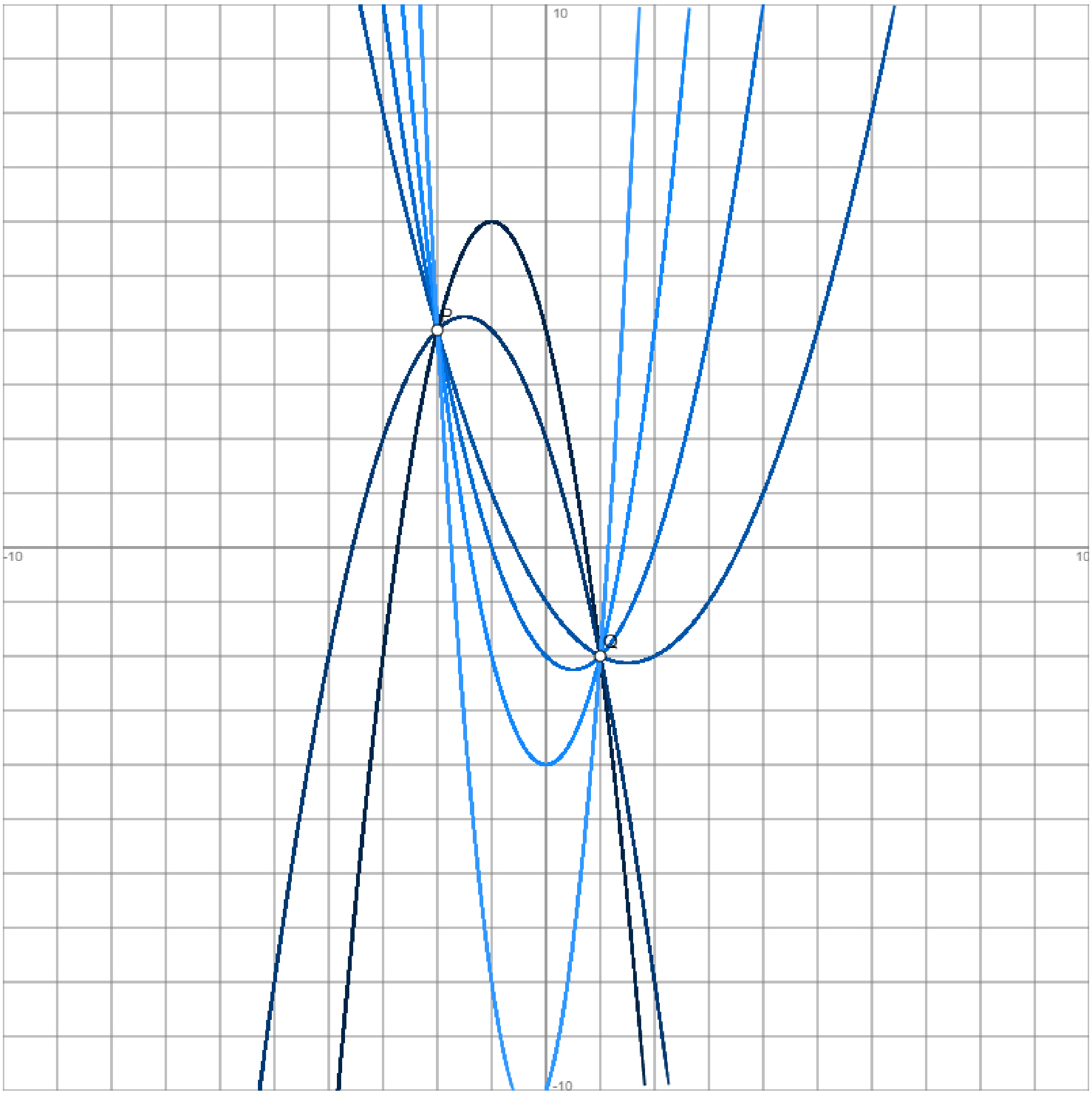
Parameter *a*
$b = -2 + a$
$c = -2a$

-> unendlich viele Lösungen des linearen Gleichungssystems; Parameter ist die reelle Zahl a.

IV. Die Funktionenschar $f_a(x)$ genügt also der Funktionsvorschrift:

$f(x) = f_a(x) = ax^2 + (a-2)x – 2a$.

V. Die Graphen einiger Funktionen der Funktionenschar $f_a(x)$ mit a = -2, -1, 0,5, 1, 2, 5 sind nachstehend dargestellt:



$f_{-2}(x) = -2x^2–4x+4$, $f_{-1}(x) = -x^2–3x+2$, $f_{0,5}(x) = 0,5x^2–1,5x–1$, $f_1(x) = x^2–x–2$, $f_2(x) = 2x^2–4$, $f_5(x) = 5x^2+3x–10$

www.michael-buhlmann.de / 05.2023 / Aufgabe 1843