Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Bestimme die Polynomfunktion f(x) vom Grad 3, deren Graph eine Nullstelle bei x = -2 und den Hochpunkt H(4|0) hat sowie bei -4 die y-Achse schneidet.

1. Lösung: I. Ganz rationale Funktion (Summe von Potenzen): Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ -> Eigenschaften:

(1) Punkt N(-2|0) als Nullstelle: f(-2) = 0 -> Gleichung: $a\cdot(-2)^3 + b\cdot(-2)^2 + c\cdot(-2) + d = 0$
(2) Punkt H(4|0) als Nullstelle: f(4) = 0 -> Gleichung: $a\cdot4^3 + b\cdot4^2 + c\cdot4 + d = 0$
(3) Punkt H(4|0) als Hoch-/Tiefpunkt: f'(4) = 0 -> Gleichung: $3a\cdot4^2 + 2b\cdot4 + c = 0$
(4) Punkt P(0|-4): f(0) = -4 -> Gleichung: $a\cdot0^3 + b\cdot0^2 + c\cdot0 + d = -4$

II. Koeffizientenbestimmung: 4x4-Gleichungssystem (Dreiecksgestalt) ->

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrr} -8a & +4b & -2c & +1d & = 0 \\ +64a & +16b & +4c & +1d & = 0 \\ +48a & +8b & +1c & & = 0 \\ & & & +1d & = -4 \end{array}$$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{rrrr|r} -8 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 64 & 16 & 4 & 1 & 0 \\ 48 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}$$

1. Schritt: 1*(*2*) + 8*(*1*) / 1*(*3*) + 6*(*1*) /

$$\begin{array}{rrrr|r} -8 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 48 & -12 & 9 & 0 \\ 0 & 32 & -11 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}$$

2. Schritt: 3*(*3*) - 2*(*2*) /

$$\begin{array}{rrrr|r} -8 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 48 & -12 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}$$

3. Schritt: (keine Umformung) /

$$\begin{array}{rrrr|r} -8 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 48 & -12 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrr} -8a & +4b & -2c & +1d & = 0 \\ & +48b & -12c & +9d & = 0 \\ & & -9c & & = 0 \\ & & & +1d & = -4 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$d = -4$
$c = 0$
$b = 0.75$
$a = -0.125$

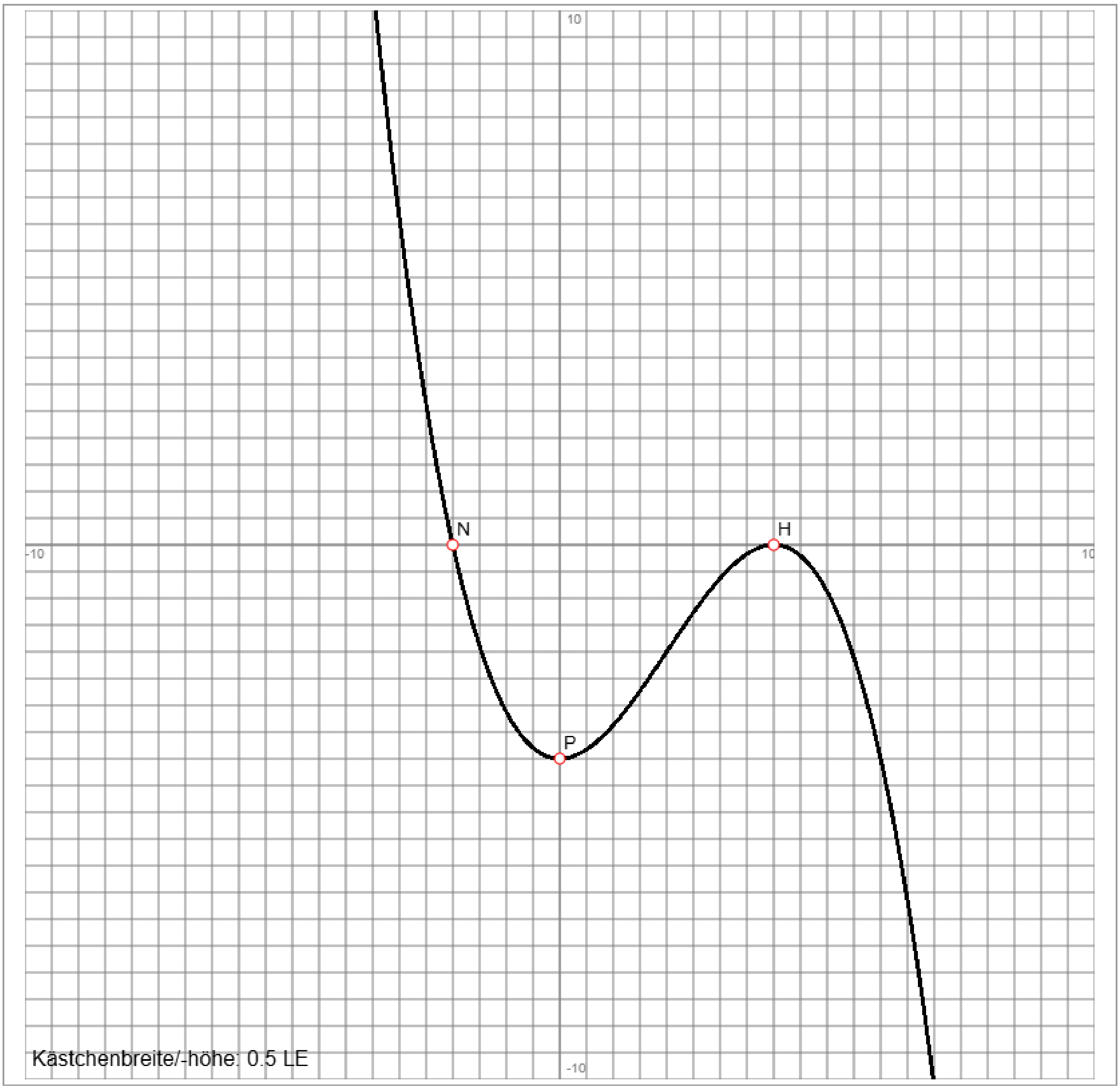
III. Funktion: $f(x) = -0.125x^3 + 0.75x^2 - 4$

IV. Wertetabelle, Graph, Ableitungen: $f(x) = -0.125x^3 + 0.75x^2 - 4$; $f'(x) = -0.375x^2 + 1.5x$; $f''(x) = -0.75x + 1.5$; $f'''(x) = -0.75$

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-2	0	-4.5	3	-0.75	Nullstelle N(-2|0)
0	-4	0	1.5	-0.75	Schnittpunkt S_y(0|-4) = Tiefpunkt T(0|-4)
2	-2	1.5	0	-0.75	Wendepunkt W(2|-2)
4	0	0	-1.5	-0.75	Nullstelle N(4|0) = Hochpunkt H(4|0)

Graph:



2. Lösung: I. Ganz rationale Funktion (Linearfaktorzerlegung/Produktdarstellung): Ansatz: $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)^2$ mit einfacher Nullstelle x_1 und zweifacher Nullstelle x_2 -> Eigenschaften:

(1) $x_1 = -2$ als einfache Nullstelle -> Funktionsgleichung: $f(x) = a(x-(-2))(x-x_2)^2 = a(x+2)(x-x_2)^2$
(2) $x_2 = 4$ als zweifache Nullstelle wegen Hochpunkt H(4|0) -> Gleichung: $f(x) = a(x+2)(x-4)^2$
(3) Schnittpunkt mit y-Achse bei y = -4 -> Punkt P(0|-4).

II. Koeffizientenbestimmung: Es ist nur der Koeffizient a zu ermitteln, was gemäß (3) durch Punktprobe geschieht:

P(0|-4) -> $f(0) = a(0+2)(0-4)^2 = -4 \Leftrightarrow 32a = -4 \Leftrightarrow a = -1/8 = -0.125$.

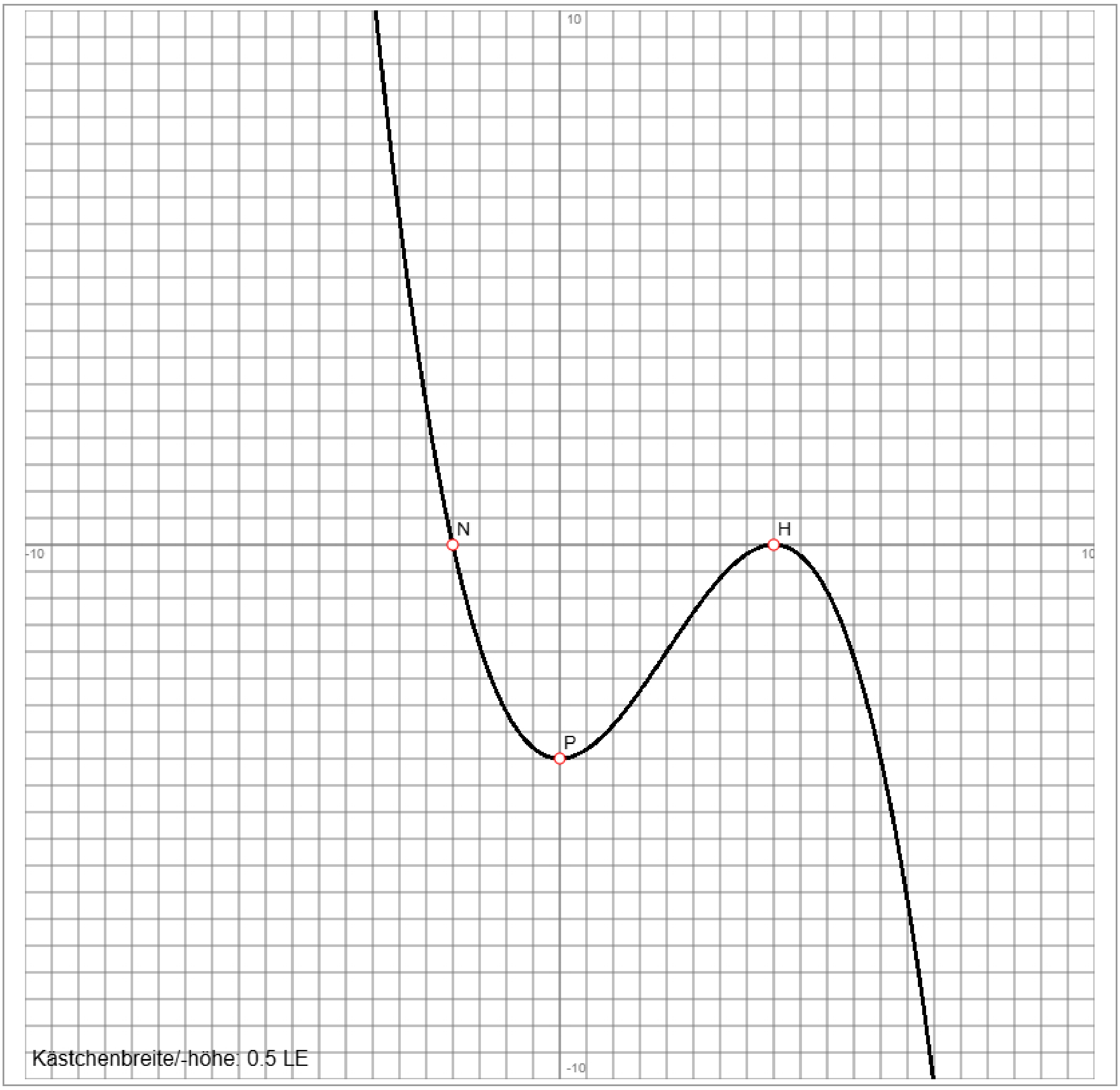
III. Funktion: $f(x) = -0.125(x+2)(x-4)^2 = -0.125x^3 + 0.75x^2 - 4$

IV. Wertetabelle, Graph: $f(x) = -0.125x^3 + 0.75x^2 – 4$ (siehe 1. Lösung).

Wertetabelle:

x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**f'''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-2	0	-4.5	3	-0.75	Nullstelle N(-2|0)
0	-4	0	1.5	-0.75	Schnittpunkt S_y(0|-4) = Tiefpunkt T(0|-4)
2	-2	1.5	0	-0.75	Wendepunkt W(2|-2)
4	0	0	-1.5	-0.75	Nullstelle N(4|0) = Hochpunkt H(4|0)

Graph:



www.michael-buhlmann.de / 05.2024 / Aufgabe 2098