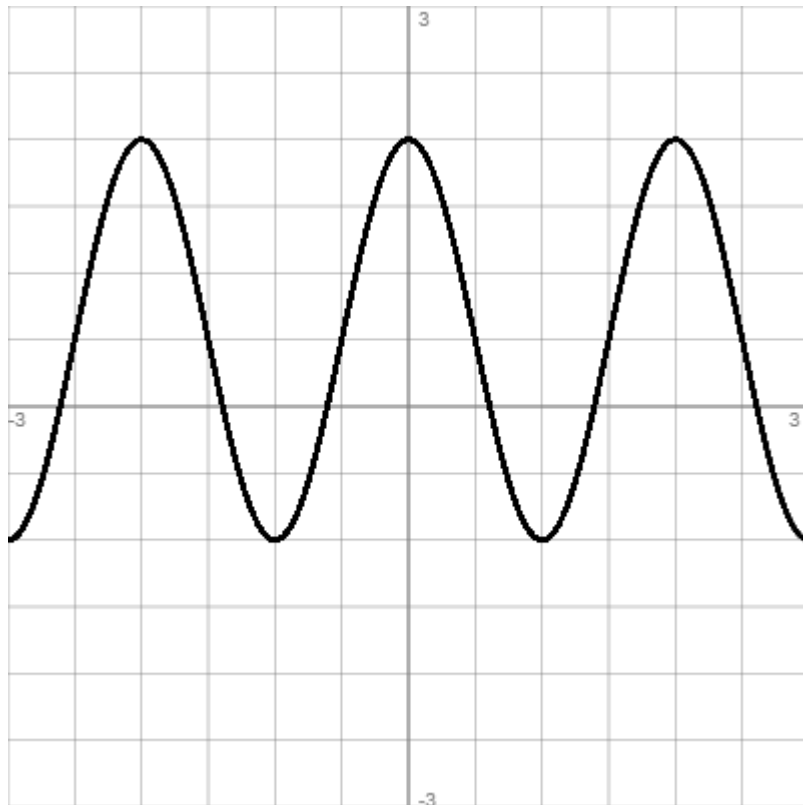


# Mathematikaufgaben

## > Analysis

### > Trigonometrische Funktionen

**Aufgabe:** Gegeben ist der nachstehende Graph einer trigonometrischen Funktion  $f(x)$ :



Bestimme die Funktionsgleichung der trigonometrischen Funktion.

**Lösung:** I. Es liegt mit dem oben dargestellten Graphen eine Kosinusfunktion vor (mit Hoch- oder Tiefpunkt der Funktion auf der y-Achse des Koordinatensystems). Es ist damit eine Funktion vom Typ:

$$f(x) = a \cdot \cos(bx) + d$$

mit zu errechnenden reellen Zahlen  $a$ ,  $b$ ,  $d$  zu bestimmen (Bestimmungsaufgabe). Sind dann mit Hochpunkt  $H(x_H|y_H)$  und Tiefpunkt  $T(x_T|y_T)$  zwei im Graphen unmittelbar aufeinanderfolgende Extrempunkte der Funktion  $f(x)$  gegeben, so gelten hinsichtlich der Parameter  $a$ ,  $b$ ,  $d$  die folgenden Berechnungen:

$$d = \frac{y_H + y_T}{2} \text{ (Mittellinie, Verschiebung entlang der y-Achse)}$$

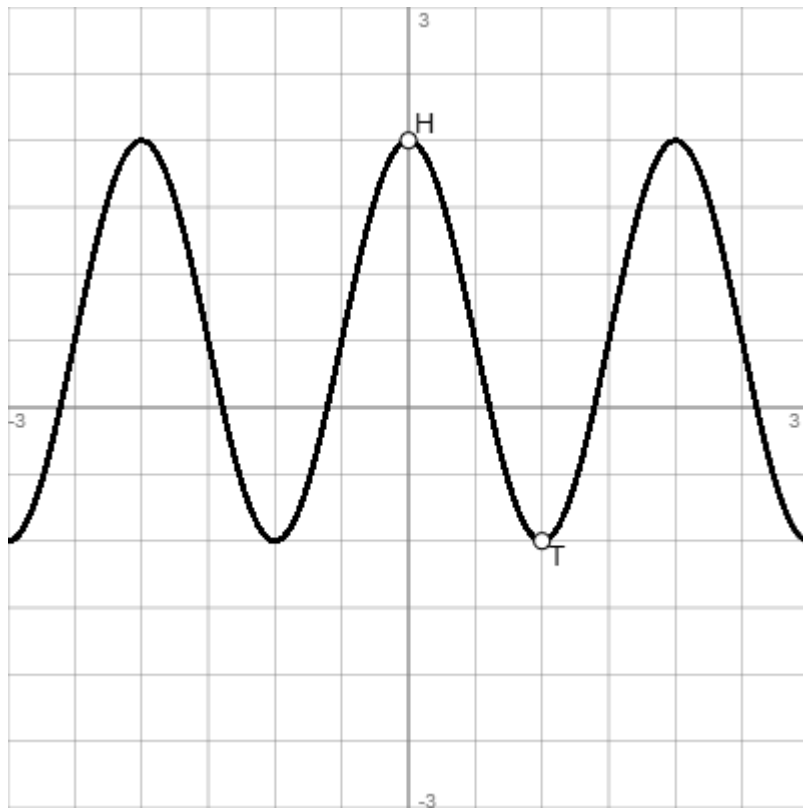
$$|a| = y_H - d \text{ mit } a > 0 \text{ bei } x_H < x_T \text{ bzw. } a < 0 \text{ bei } x_H > x_T, x_H, x_T \in [0; p] \text{ (Amplitude, Streckung/Stauchung entlang der y-Achse)}$$

$$\frac{p}{2} = |x_H - x_T| \Rightarrow p = 2 \cdot |x_H - x_T| \text{ (Periode)}$$

$$b = \frac{2\pi}{p} \text{ (Periodenparameter, Streckung/Stauchung entlang der x-Achse).}$$

Die Verschiebung entlang der y-Achse ( $d$ ), die Streckung/Stauchung entlang der y-Achse ( $a$ ), die Streckung/Stauchung entlang der x-Achse ( $b$ ) beziehen sich auf die Verschiebung und Streckung/Stauchung der trigonometrischen Grundfunktionen  $y = \sin(x)$  bzw.  $y = \cos(x)$ .

II. Wir ergänzen den Graphen durch Einfügen des Hochpunkts  $H(0|2)$  und des Tiefpunkts  $T(1|-1)$  und haben:



Gemäß I. ergibt sich für die die Funktion definierenden Parameter:

$$\text{Mittellinie: } d = \frac{y_H + y_T}{2} = \frac{2 + (-1)}{2} = 0.5$$

$$\text{Amplitude: } |a| = y_H - d = 2 - 0.5 = 1.5 \Rightarrow a = 1.5$$

$$\frac{p}{2} = |x_H - x_T| = |0 - 1| = 1 \Rightarrow \text{Periode: } p = 2 \Rightarrow \text{Periodenparameter: } b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

III. Mit den Parametern  $a = 1.5$ ,  $b = \pi$ ,  $d = 0.5$  erhalten wir die Funktionsgleichung der Kosinusfunktion  $f(x)$

$$f(x) = 1.5 \cdot \cos(\pi x) + 0.5$$

und haben damit die zum vorgegebenen Graphen gehörende trigonometrische Funktion bestimmt.