Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Der Graph einer ganz rationalen Funktion 3. Grades besitzt den Hochpunkt H(0|0), einen Wendepunkt an der Stelle $x = 8/3$. Zudem liegt der P(2|-24) auf der Funktionskurve. Wie lautet die Funktionsgleichung?

Lösung: I. Ganz rationale Funktion: Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $f''(x) = 6ax + 2b$

Eigenschaften:

(1) Punkt H(0|0): $f(0) = 0$ -> Gleichung: $a\cdot 0^3 + b\cdot 0^2 + c\cdot 0 + d = 0$
(2) Punkt H(0|0) als Hochpunkt: $f'(0) = 0$ -> Gleichung: $3a\cdot 0^2 + 2b\cdot 0 + c = 0$
(3) $x = 8/3$ als Wendestelle: $f''(8/3) = 0$ -> Gleichung: $6a\cdot 8/3 + 2b = 0$
(4) Punkt P(2|-24): $f(2) = a\cdot 2^3 + b\cdot 2^2 + c\cdot 2 + d = -24$

II. Koeffizientenbestimmung: Es gilt:

(1) => $d = 0$
(2) => $c = 0$
(3) => $16a + 2b = 0$ => $8a + b = 0$
(4) => $8a + 4b = -24$

Im 2x2-Gleichungssystem:

$8a + b = 0$
$8a + 4b = -24$

subtrahieren wir die 2. von der 1. Gleichung und haben:

$-3b = 24$ => $b = -8$.

Der Koeffizient a bestimmt sich als:

$8a – 8 = 0$ => $8a = 8$ => $a = 1$.

III. Funktion: $f(x) = x^3 - 8x^2$, $f'(x) = 3x^2 - 16x$, $f''(x) = 6x – 16$, $f'''(x) = 6$

IV. Probe: Wir überprüfen, ob an der Stelle $x = 0$ ein Hochpunkt vorliegt. Dies ist wegen $f''(0) = -16 < 0$ aber der Fall, so dass die ermittelte Funktion alle geforderten Eigenschaften erfüllt.

V. Die gesuchte Funktion lautet somit: $f(x) = x^3 - 8x^2$.

www.michael-buhlmann.de / 10.2024 / Aufgabe 2224