Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Der Graph einer ganz rationalen Funktion 3. Grades besitzt an der Stelle x = 2 einen Tiefpunkt, die Tangente y = -3x +1 an der Stelle x = 1 ist eine Wendetangente. Wie lautet die Funktionsgleichung?

Lösung: I. Ganz rationale Funktion: Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $f''(x) = 6ax + 2b$

Eigenschaften:

Wendetangente y = -3x+1 an der Stelle x = 1: f(1) = y(1) = -2, f'(1) = y' = -3, f''(1) = 0 (Wendepunkt)

(1) Stelle x = 2 als Hoch-/Tiefstelle: f'(2) = 0 -> Gleichung: $3a\cdot 2^2 + 2b\cdot 2 + c = 0$
(2) Punkt W(1|-2): f(1) = -2 -> Gleichung: $a\cdot 1^3 + b\cdot 1^2 + c\cdot 1 + d = -2$
(3) Punkt W(1|-2): f'(1) = -3 -> Gleichung: $3a\cdot 1^2 + 2b\cdot 1 + c = -3$
(4) Punkt W(1|-2) als Wendepunkt: f''(1) = 0 -> Gleichung: $6a\cdot 1 + 2b = 0$

II. Koeffizientenbestimmung: 4x4-Gleichungssystem (Dreiecksgestalt)

Lineares Gleichungssystem:

$+ 12a + 4b + 1c = 0$
$+ 1a + 1b + 1c + 1d = -2$
$+ 3a + 2b + 1c = -3$
$+ 6a + 2b = 0$

Anfangstableau:

12	4	1	0	|	0
1	1	1	1	|	-2
3	2	1	0	|	-3
6	2	0	0	|	0

1. Schritt: 12*(*2*) - 1*(*1*) / 4*(*3*) - 1*(*1*) / 2*(*4*) - 1*(*1*) /

12	4	1	0	|	0
0	8	11	12	|	-24
0	4	3	0	|	-12
0	0	-1	0	|	0

2. Schritt: 2*(*3*) - 1*(*2*) /

12	4	1	0	|	0
0	8	11	12	|	-24
0	0	-5	-12	|	0
0	0	-1	0	|	0

3. Schritt: -5*(*4*) + 1*(*3*) /

12	4	1	0	|	0
0	8	11	12	|	-24
0	0	-5	-12	|	0
0	0	0	-12	|	0

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrrrrl}
+ & 12a & + & 4b & + & 1c & & & = 0 \\
 & & + & 8b & + & 11c & + & 12d & = -24 \\
 & & & & - & 5c & - & 12d & = 0 \\
 & & & & & & - & 12d & = 0
\end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$d = 0$
$c = 0$
$b = -3$
$a = 1$

III. Funktion: $f(x) = x^3 - 3x^2$; $f'(x) = 3x^2 - 6x$; $f''(x) = 6x - 6$; $f'''(x) = 6$

IV. Probe: Wir überprüfen, ob an der Stelle x = 2 ein Tiefpunkt vorliegt. Dies ist wegen f‘‘(2) = 6 > 0 aber der Fall, so dass die ermittelte Funktion alle geforderten Eigenschaften erfüllt.

V. Wertetabelle, Graph: $f(x) = x^3 - 3x^2$; $f'(x) = 3x^2 - 6x$; $f''(x) = 6x - 6$; $f'''(x) = 6$

Wertetabelle:

x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**f'''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
0	0	0	-6	6	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Hochpunkt H(0|0)
1	-2	-3	0	6	Wendepunkt W(1|-2)
2	-4	0	6	6	Tiefpunkt T(2|-4)
3	0	9	12	6	Nullstelle N(3|0)

Graph: