Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Der Graph der Exponentialfunktion $f(x) = a \cdot e^{bx}$ besitzt im Schnittpunkt mit der y-Achse des x-y-Koordinatensystems die Steigung 0,5 und verläuft durch den Punkt P(1|2). Wie lautet die Funktionsgleichung?

Lösung: I. Es sind im allgemeinen Funktionsterm $f(x) = a \cdot e^{bx}$ die Koeffizienten a und b zu bestimmen. Dabei mit gelten mit:

$f(x) = a \cdot e^{bx}$
$f'(x) = ab \cdot e^{bx}$

und den geforderten Eigenschaften der Funktion die mathematischen Aussagen:

Steigung bei x = 0 als m = 0,5 => $f'(0) = ab \cdot e^0 = ab = 0,5$ (1)
Punkt P(1|2) => $f(1) = a \cdot e^b = 2$ (2).

II. Wir ermitteln die Zahlen a, b. Zunächst führt die Division der Gleichungen (1) und (2) auf:

$a \cdot e^b = 2$ (2)
$ab = 0,5$ (1)

(2):(1): $\frac{ae^b}{ab} = \frac{2}{0,5} \Rightarrow \frac{e^b}{b} = 4 \Rightarrow e^b = 4b$ (3),

so dass mit der Beziehung (3) die Zahl b zu ermitteln ist. Die Gleichung (3) kann indes nur numerisch (oder grafisch) gelöst werden. Wir verwenden dazu das Newtonverfahren und bilden wegen: $e^b = 4b \Leftrightarrow e^b - 4b = 0$ die Hilfsfunktion $h(b) = e^b - 4b$, deren Nullstell(en) wir bestimmen. Beim Newtonverfahren gilt die Iteration:

$$b_{n+1} = b_n - \frac{h(b_n)}{h'(b_n)}$$

(n = 0, 1, 2, …) mit einem Anfangswert b_0 und mit der Ableitung: $h'(b) = e^b - 4$. Es ergibt sich damit die Iteration:

$$b_{n+1} = b_n - \frac{e^{b_n} - 4b_n}{e^{b_n} - 4}$$

und mit $b_0 = 0$ als Anfangswert:

Iteration n =	$\mathbf{b_n} = b_{n-1}-h(b_{n-1})/h'(b_{n-1})$	**Nullstelle**
0	0	
1	0.3333333333333333	
2	0.35724647604398185	
3	0.3574029493733072	
4	0.3574029561813889	
5	0.3574029561813889	
		h(0.3574029561813889) = 0

so dass sich als Koeffizient b ≈ 0,3574 ergibt.

Die Gleichung (3) hat indes eine weitere Lösung. Dazu wählen wir den Anfangswert $b_0 = 2$ und haben als Iteration:

Iteration n =	**b_n** = b_{n-1}-h(b_{n-1})/h'(b_{n-1})	**Nullstelle**
0	2	
1	2.1802696335602474	
2	2.153950512587319	
3	2.1532927681634013	
4	2.1532923641105017	
5	2.15329236411035	
		h(2.15329236411035) = 0

mit b ≈ 2,1533 als Koeffizienten.

III. Die Beziehung (1) führt dann im Fall b ≈ 0,3574 auf:

a·0,3574 = 0,5 => a = 0,5/0,3574 = 1,4

und damit auf die Funktion $f(x) = 1{,}4 \cdot e^{0{,}3574x}$, im Fall b ≈ 2,1533 auf:

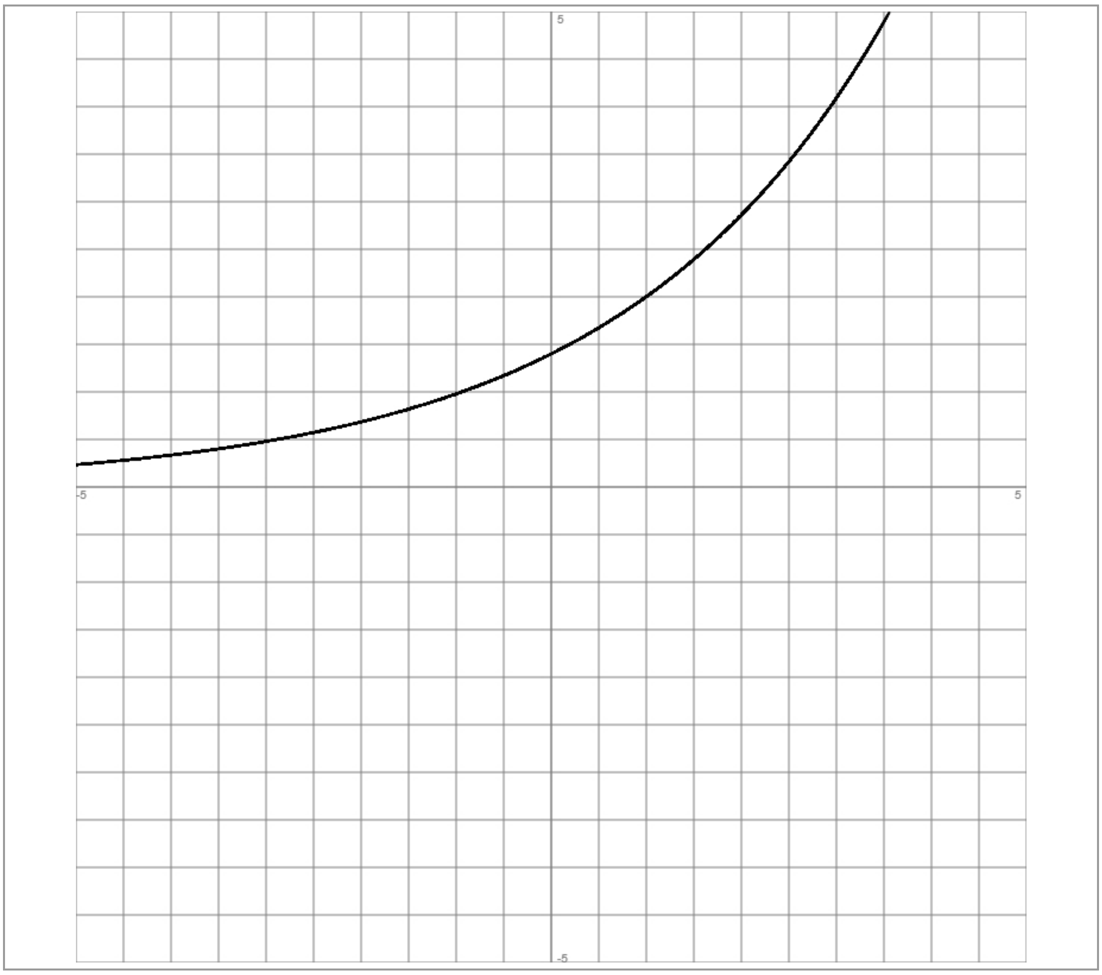
a·2,1533 = 0,5 => a = 0,5/2,1533 = 0,2322

und damit auf die Funktion $f(x) = 0{,}2322 \cdot e^{2{,}1533x}$. Es gibt also zwei Lösungen der oben stehenden Bestimmungsaufgabe.

IV. Wertetabelle, Graph: $f(x) = 1{,}4 \cdot e^{0{,}3574x}$

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-5	0.2344	0.08	0.03	
-4.5	0.2803	0.1	0.04	
-4	0.3352	0.12	0.04	
-3.5	0.4007	0.14	0.05	
-3	0.4792	0.17	0.06	
-2.5	0.5729	0.2	0.07	
-2	0.685	0.24	0.09	
-1.5	0.819	0.29	0.1	
-1	0.9793	0.35	0.13	
-0.5	1.1709	0.42	0.15	
0	1.4	0.5	0.18	Schnittpunkt S_y(0|1.4)
0.5	1.6739	0.6	0.21	
1	2	0.72	0.26	Kurvenpunkt P(1|2)
1.5	2.3931	0.86	0.31	
2	2.8613	1.02	0.37	
2.5	3.4211	1.22	0.44	
3	4.0905	1.46	0.52	
3.5	4.8909	1.75	0.62	
4	5.8478	2.09	0.75	
4.5	6.992	2.5	0.89	
5	8.3601	2.99	1.07	

Graph:

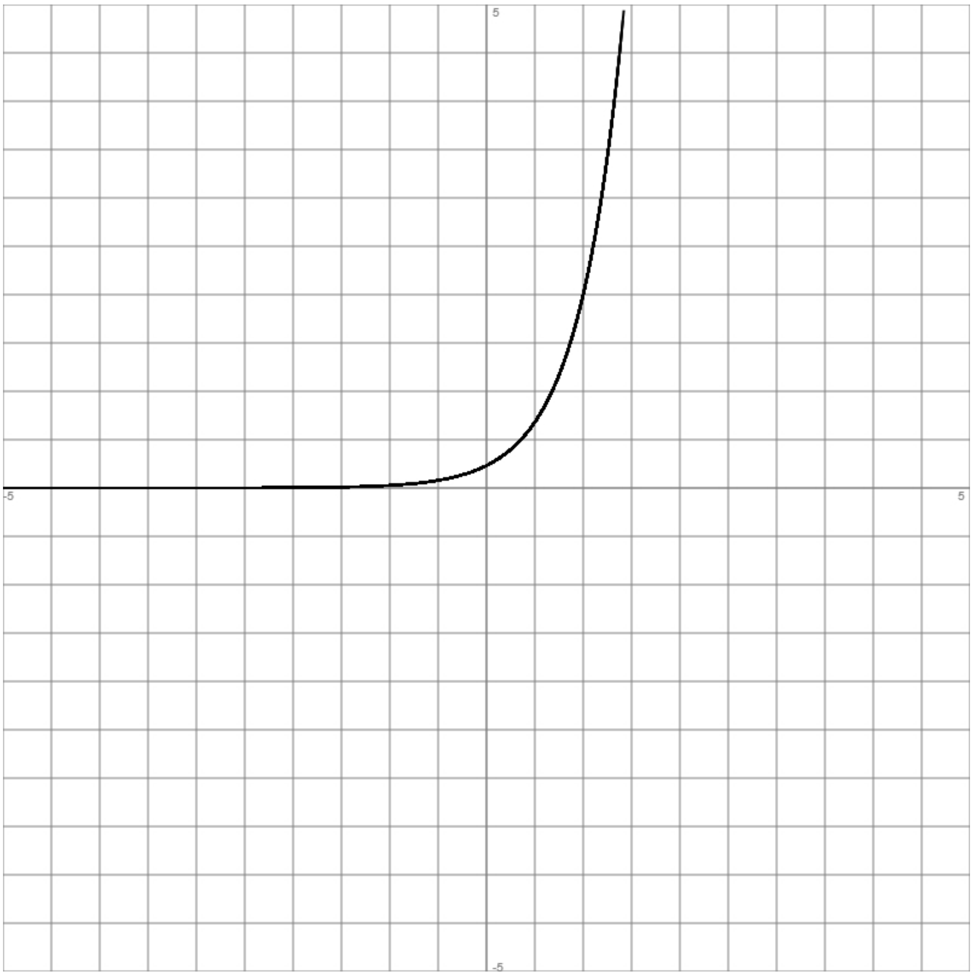


V. Wertetabelle, Graph: $f(x) = 0{,}2322 \cdot e^{2{,}1533x}$

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-5	0	0	0	
-4.5	0	0	0	
-4	0	0	0	
-3.5	0.0001	0	0	
-3	0.0004	0	0	
-2.5	0.0011	0	0	
-2	0.0031	0.01	0.01	
-1.5	0.0092	0.02	0.04	
-1	0.027	0.06	0.13	
-0.5	0.0791	0.17	0.37	
0	0.2322	0.5	1.08	Schnittpunkt $S_y(0\|0.23)$
0.5	0.6815	1.47	3.16	
1	2	4.31	9.27	Kurvenpunkt P(1|2)
1.5	5.8696	12.64	27.22	
2	17.2264	37.1	79.88	
2.5	50.5566	108.87	234.42	
3	148.3751	319.52	688	

3.5	435.456	937.74	2019.16	
4	1277.99	2752.11	5925.89	
4.5	3750.6851	8076.97	17391.48	
5	11007.6283	23704.56	51041.05	

Graph:



www.michael-buhlmann.de / 11.2024 / Aufgabe 2254