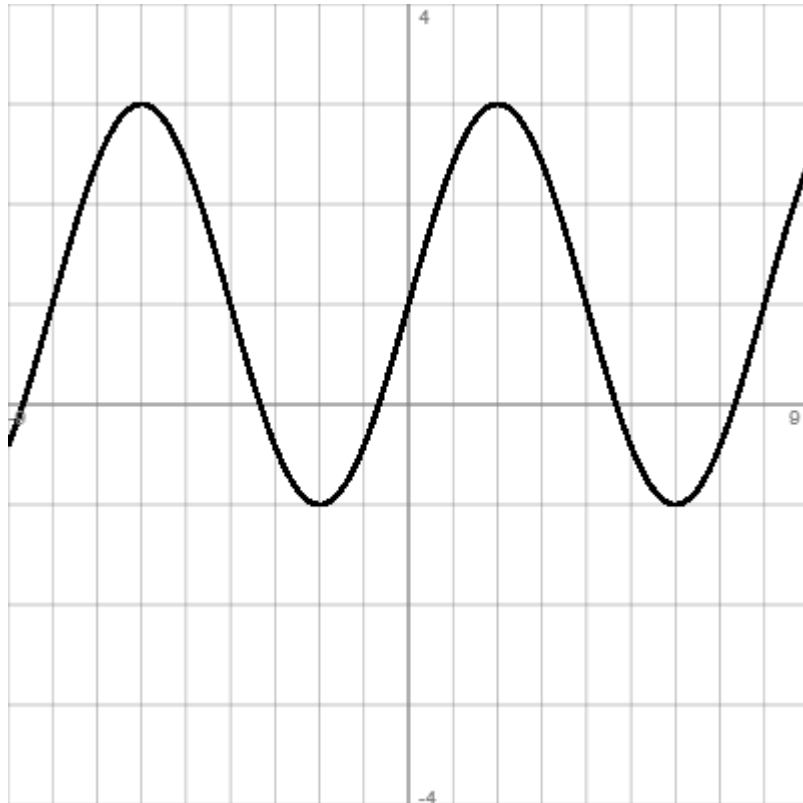


Mathematikaufgaben

> Analysis

> Trigonometrische Funktionen

Aufgabe: Gegeben ist der nachstehende Graph einer trigonometrischen Funktion $f(x)$:



Bestimme die Funktionsgleichung der trigonometrischen Funktion.

Lösung: I. Es liegt mit dem oben dargestellten Graphen eine Sinusfunktion vor (mit Mittellinienpunkt der Funktion auf der y-Achse des Koordinatensystems). Es ist damit eine Funktion vom Typ:

$$f(x) = a \cdot \sin(bx) + d$$

mit zu errechnenden reellen Zahlen a , b , d zu bestimmen (Bestimmungsaufgabe). Sind dann mit Hochpunkt $H(x_H|y_H)$ und Tiefpunkt $T(x_T|y_T)$ zwei im Graphen unmittelbar aufeinanderfolgende Extrempunkte der Funktion $f(x)$ gegeben, so gelten hinsichtlich der Parameter a , b , d die folgenden Berechnungen:

$$d = \frac{y_H + y_T}{2} \text{ (Mittellinie, Verschiebung entlang der y-Achse)}$$

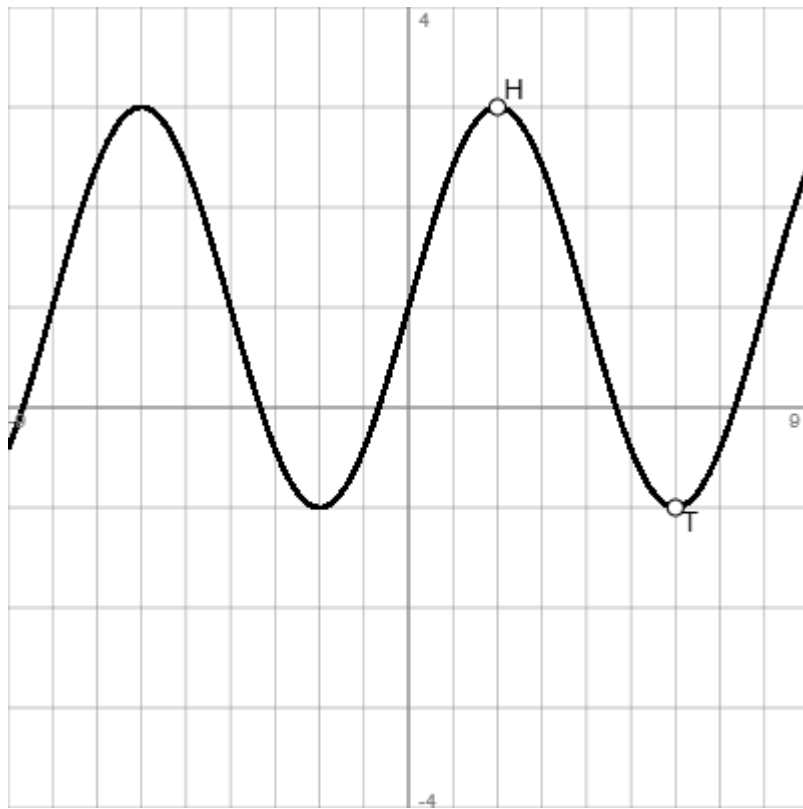
$$|a| = y_H - d \text{ mit } a > 0 \text{ bei } x_H < x_T \text{ bzw. } a < 0 \text{ bei } x_H > x_T, x_H, x_T \in [0; p] \text{ (Amplitude, Streckung/Stauchung entlang der y-Achse)}$$

$$\frac{p}{2} = |x_H - x_T| \Rightarrow p = 2 \cdot |x_H - x_T| \text{ (Periode)}$$

$$b = \frac{2\pi}{p} \text{ (Periodenparameter, Streckung/Stauchung entlang der x-Achse).}$$

Die Verschiebung entlang der y-Achse (d), die Streckung/Stauchung entlang der y-Achse (a), die Streckung/Stauchung entlang der x-Achse (b) beziehen sich auf die Verschiebung und Streckung/Stauchung der trigonometrischen Grundfunktionen $y = \sin(x)$ bzw. $y = \cos(x)$.

II. Wir ergänzen den Graphen durch Einfügen des Hochpunkts $H(2|3)$ und des Tiefpunkts $T(6|-1)$ und haben:



Gemäß I. ergibt sich für die die Funktion definierenden Parameter:

$$\text{Mittellinie: } d = \frac{y_H + y_T}{2} = \frac{3 + (-1)}{2} = 1$$

$$\text{Amplitude: } |a| = y_H - d = 3 - 1 = 2 \Rightarrow a = 2$$

$$\frac{p}{2} = |x_H - x_T| = |2 - 6| = 4 \Rightarrow \text{Periode: } p = 8 \Rightarrow \text{Periodenparameter: } b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

III. Mit den Parametern $a = 2$, $b = \frac{\pi}{4}$, $d = 1$ erhalten wir die Funktionsgleichung der Sinusfunktion $f(x)$ als:

$$f(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) + 1$$

und haben damit die zum vorgegebenen Graphen gehörende trigonometrische Funktion bestimmt.