

# Mathematikaufgaben

## > Algebra

## > Biquadratische Gleichungen

---

**Aufgabe:** Bestimme die Lösung der biquadratischen Gleichung:

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0.$$

**Lösung:** I. Allgemein gilt für das Lösen von biquadratischen Gleichungen, also von Gleichungen z.B. mit der Variablen  $x$ , die folgende Vorgehensweise: Biquadratische Gleichungen sind Gleichungen mit der Variablen  $x$ , die der Form  $ax^4 + bx^2 + c = 0$  (\*) mit reellen Zahlen  $a, b, c, a \neq 0$ , genügen. Vermöge der Substitution  $z = x^2$  folgt aus (\*) die quadratische Gleichung  $az^2 + bz + c = 0$

(\*\*). Die Lösung der quadratischen Gleichung (\*\*) ist dann:  $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  (a-b-c-Formel).

Rücksubstitution  $x^2 = z$  liefert somit die Gleichungen:  $x^2 = z_1, x^2 = z_2$ , aus denen sich durch Ziehen der Wurzel die 0 bis 4 Lösungen der biquadratischen Gleichung ergeben.

Um eine biquadratische Gleichung der Form (\*) zu erlangen, sind eventuell noch Term- und Gleichungsumformungen durchzuführen, die die Terme der Gleichung u.a. durch das Auflösen von Klammern, durch Addition/Subtraktion von Summanden und Multiplikation/Division von Faktoren betreffen.

II. Wir bringen die Gleichung durch Substitution in die Form  $az^2 + bz + c = 0$ , lösen die quadratische Gleichung mit der a-b-c-Formel und führen die Rücksubstitution durch:

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

(Substitution:  $z = x^2$ )

$$z^2 - 10z + 9 = 0$$

(a-b-c-Formel:  $a = 1, b = -10, c = 9$ )

$$z_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1}$$

(Ausrechnen)

$$z_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2}$$

(Wurzel ausrechnen)

$$z_{1,2} = \frac{10 \pm 8}{2}$$

(Lösungen  $z_1, z_2$ )

$$z_1 = \frac{10+8}{2} = \frac{18}{2} = 9, \quad z_2 = \frac{10-8}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

(Rücksubstitution:  $x^2 = z$ )

$$x^2 = 9, \quad x^2 = 1$$

|  $\sqrt{\quad}$

$$x = \pm 3, \quad x = \pm 1$$

Wir erhalten  $x_1 = -3, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = 3$  als Lösungen; Lösungsmenge ist also:  $L = \{-3; -1; 1; 3\}$ .