

Mathematikaufgaben

> Algebra

> Biquadratische Gleichungen

Aufgabe: Bestimme die Lösung der biquadratischen Gleichung:

$$3x^4 - x^2 - 2 = 0.$$

Lösung: I. Allgemein gilt für das Lösen von biquadratischen Gleichungen, also von Gleichungen z.B. mit der Variablen x , die folgende Vorgehensweise: Biquadratische Gleichungen sind Gleichungen mit der Variablen x , die der Form $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (*) mit reellen Zahlen $a, b, c, a \neq 0$, genügen. Vermöge der Substitution $z = x^2$ folgt aus (*) die quadratische Gleichung $az^2 + bz + c = 0$

(**). Die Lösung der quadratischen Gleichung (**) ist dann: $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (a-b-c-Formel).

Rücksubstitution $x^2 = z$ liefert somit die Gleichungen: $x^2 = z_1, x^2 = z_2$, aus denen sich durch Ziehen der Wurzel die 0 bis 4 Lösungen der biquadratischen Gleichung ergeben.

Um eine biquadratische Gleichung der Form (*) zu erlangen, sind eventuell noch Term- und Gleichungsumformungen durchzuführen, die die Terme der Gleichung u.a. durch das Auflösen von Klammern, durch Addition/Subtraktion von Summanden und Multiplikation/Division von Faktoren betreffen.

II. Wir bringen die Gleichung durch Substitution in die Form $az^2 + bz + c = 0$, lösen die quadratische Gleichung mit der a-b-c-Formel und führen die Rücksubstitution durch:

$$3x^4 - x^2 - 2 = 0$$

(Substitution: $z = x^2$)

$$3z^2 - z - 2 = 0$$

(a-b-c-Formel: $a = 3, b = -1, c = -2$)

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3}$$

(Ausrechnen)

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{6}$$

(Wurzel ausrechnen)

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{6}$$

(Lösungen z_1, z_2)

$$z_1 = \frac{1+5}{6} = \frac{6}{6} = 1, \quad z_2 = \frac{1-5}{6} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

(Rücksubstitution: $x^2 = z$)

$$x^2 = 1, \quad x^2 = -\frac{2}{3}$$

| $\sqrt{\quad}$

$x = \pm 1$, (keine Lösung)

Wir erhalten $x_1 = -1, x_2 = 1$ als Lösungen; Lösungsmenge ist also: $L = \{-1; 1\}$.