Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Algebra
> Biquadratische Gleichungen

Aufgabe: Bestimme die Lösung der biquadratischen Gleichung:

$$x^4 - \frac{101}{4}x^2 + \frac{25}{4} = 0\,.$$

Lösung: I. Allgemein gilt für das Lösen von biquadratischen Gleichungen, also von Gleichungen z.B. mit der Variablen x, die folgende <u>Vorgehensweise</u>: Biquadratische Gleichungen sind Gleichungen mit der Variablen x, die der Form $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (*) mit reellen Zahlen a, b, c, a≠0, genügen. Vermöge der Substitution $z = x^2$ folgt aus (*) die quadratische Gleichung $az^2 + bz + c = 0$ (**). Die Lösung der quadratischen Gleichung (**) ist dann: $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (a-b-c-Formel). Rücksubstitution $x^2 = z$ liefert somit die Gleichungen: $x^2 = z_1$, $x^2 = z_2$, aus denen sich durch Ziehen der Wurzel die 0 bis 4 Lösungen der biquadratischen Gleichung ergeben.
Um eine biquadratische Gleichung der Form (*) zu erlangen, sind eventuell noch Term- und Gleichungsumformungen durchzuführen, die die Terme der Gleichung u.a. durch das Auflösen von Klammern, durch Addition/Subtraktion von Summanden und Multiplikation/Division von Faktoren betreffen.

II. Wir bringen die Gleichung durch Substitution in die Form $az^2 + bz + c = 0$, lösen die quadratische Gleichung mit der a-b-c-Formel und führen die Rücksubstitution durch:

$x^4 - \frac{101}{4}x^2 + \frac{25}{4} = 0$	$\mid \cdot 4$
$4x^4 - 101x^2 + 25 = 0$	(Substitution: $z = x^2$)
$4z^2 - 101z + 25 = 0$	(a-b-c-Formel: a = 4, b = -101, c = 25)
$z_{1,2} = \frac{101 \pm \sqrt{101^2 - 4 \cdot 4 \cdot 25}}{2 \cdot 4}$	(Ausrechnen)
$z_{1,2} = \frac{101 \pm \sqrt{9801}}{8}$	(Wurzel ausrechnen)
$z_{1,2} = \frac{101 \pm 99}{8}$	(Lösungen z_1, z_2)
$z_1 = \frac{101+99}{8} = \frac{200}{8} = 25\,,\ z_2 = \frac{101-99}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$	(Rücksubstitution: $x^2 = z$)
$x^2 = 25$, $x^2 = 0{,}25$	$\mid \sqrt{}$
$x = \pm 5$, $x = \pm 0{,}5$	

Wir erhalten $x_1 = -5$, $x_2 = -0{,}5$, $x_3 = 0{,}5$, $x_4 = 5$ als <u>Lösungen</u>; Lösungsmenge ist damit:
L = {-5; -0,5; 0,5, 5}.

www.michael-buhlmann.de / 10.2020 / Aufgabe 1138