

Mathematikaufgaben

> Algebra

> Bruchgleichungen

Aufgabe: Bestimme Definitions- und Lösungsmenge der Bruchgleichung:

$$\frac{x^2 + 25x + 100}{2x^2 + 20x + 50} = \frac{2x + 3}{x + 5} - \frac{x - 6}{2x + 10}$$

Lösung: I. Allgemein gilt für das Lösen von Bruchgleichungen, also von Gleichungen z.B. mit der Variablen x, die Brüche enthalten, die folgende Vorgehensweise:

1) Bestimmung des Hauptnenners aus den Nennern der Einzelbrüche der Bruchgleichung [Der Hauptnenner ist das kleinste gemeinsame Vielfache der in den Nennern der Einzelbrüche vorhandenen Faktoren. Die Nenner der Einzelbrüche sind also in Faktoren zu zerlegen, der Hauptnenner wird als Produkt aus allen Faktoren gebildet, wobei gleiche Faktoren verschiedener Nenner der Einzelbrüche nur einmal zum Hauptnenner beitragen.], 2) Bestimmung der Definitionsmenge aus dem Hauptnenner [Nullsetzen des Hauptnenners ergibt die x-Werte, die aus der Definitionsmenge ausgeschlossen werden müssen.], 3) Multiplikation der Bruchgleichung mit dem Hauptnenner und Kürzen der einzelnen Brüche [Dabei sind Bruchgleichungen mit dem Hauptnenner zu multiplizieren, so dass: a) jeder Summand in der Gleichung mit dem Hauptnenner multipliziert wird, b) im Falle eines Bruchs als Summand Hauptnenner und Nenner des Bruchs zu kürzen sind.], 4) Ausmultiplizieren der mit dem Hauptnenner malgenommenen und gekürzten Terme [Summen, Differenzen beachten], 5) Sortieren nach x^2 , x und einfachen Zahlen, z.B. durch Addition und Subtraktion von Summanden zur Erzeugung einer Null auf einer Seite der Gleichung, 6) Auflösen der so erhaltenen linearen oder quadratischen Gleichung nach x, z.B. mit Hilfe der p-q-Formel, 7) Probe zum Abgleich von Lösungsmenge und Definitionsmenge.

Die geschilderte Vorgehensweise gilt unter der Voraussetzung, dass Bruchgleichungen auf lineare bzw. quadratische Gleichungen zurückgeführt werden können.

II. Wir gehen wie folgt vor: a) Das *Faktorisieren der Nenner* in der Bruchgleichung ergibt:

$$2x^2 + 20x + 50 = 2(x^2 + 10x + 25) = 2(x + 5)^2 \quad (1. \text{ binomische Formel});$$

$$(x + 5);$$

$$2x + 10 = 2(x + 5).$$

b) Die *Bestimmung des Hauptnenners* als kleinstes gemeinsames Vielfaches der drei Nenner ergibt: $2 \cdot 3(x - 5)(x + 5) = 6(x - 5)(x + 5)$ als Hauptnenner.

c) Für die *Bestimmung der Definitionsmenge* der Bruchgleichung gilt: Der Hauptnenner ist 0 bei:

$$6(x - 5)(x + 5) = 0 \Leftrightarrow x - 5 = 0, x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5, x = -5.$$

Die beiden x-Werte sind also auszuschließen, so dass hinsichtlich der gesuchten Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{-5, 5\}$ gilt.

d) Bei der *Bestimmung der Lösungsmenge* der Bruchgleichung verwenden wir die faktorisierten Nenner als Ausgangspunkt und gehen mittels Gleichungsumformungen wie folgt vor:

$$\frac{3x^2 + 11x - 15}{3(x - 5)(x + 5)} = \frac{x - 2}{2(x - 5)} - \frac{x + 1}{3(x + 5)} \quad | \cdot 6(x - 5)(x + 5)$$

$$\frac{(3x^2 + 11x - 15) \cdot 6(x - 5)(x + 5)}{3(x - 5)(x + 5)} = \frac{(x - 2) \cdot 6(x - 5)(x + 5)}{2(x - 5)} - \frac{(x + 1) \cdot 6(x - 5)(x + 5)}{3(x + 5)} \quad | \text{ Kürzen}$$

$$(3x^2 + 11x - 15) \cdot 2 = (x - 2) \cdot 3 \cdot (x + 5) - (x + 1) \cdot 2 \cdot (x - 5) \quad | \text{ Klammern auflösen}$$

$$6x^2 + 22x - 30 = 3 \cdot (x^2 + 5x - 2x - 10) - 2 \cdot (x^2 - 5x + x - 5)$$

$$6x^2 + 22x - 30 = 3x^2 + 15x - 6x - 30 - 2x^2 + 10x - 2x + 10 \quad | \text{ Zusammenfassen}$$

$$6x^2 + 22x - 30 = x^2 + 17x - 20$$

$$5x^2 + 5x - 10 = 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2, \quad x = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$$

$$| -x^2, -17x, + 20$$

$$| :5$$

$$| p-q-Formel$$

Beide x-Werte sind Lösungen der Bruchgleichung, da sie in der Definitionsmenge enthalten sind.
Also gilt für die Lösungsmenge: $L = \{-2, 1\}$.

www.michael-buhlmann.de / 12.2014 / Aufgabe 54