Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Algebra
> Bruchgleichungen (mit Formvariablen)

Aufgabe: Bestimme für feste reelle Zahlen a, b die Definitions- und die Lösungsmenge der folgenden Bruchgleichung:

$$\frac{bx}{x+a} - \frac{bx}{x+b} = \frac{2b-2a}{(x+a)(x+b)}.$$

Lösung: I. Allgemein gilt für das Lösen von Bruchgleichungen, also von Gleichungen z.B. mit der Variablen x, die Brüche enthalten, die folgende Vorgehensweise:

1) Bestimmung des Hauptnenners aus den Nennern der Einzelbrüche der Bruchgleichung [Der Hauptnenner ist das kleinste gemeinsame Vielfache der in den Nennern der Einzelbrüche vorhandenen Faktoren. Die Nenner der Einzelbrüche sind also in Faktoren zu zerlegen, der Hauptnenner wird als Produkt aus allen Faktoren gebildet, wobei gleiche Faktoren verschiedener Nenner der Einzelbrüche nur einmal zum Hauptnenner beitragen.], 2) Bestimmung der Definitionsmenge aus dem Hauptnenner [Nullsetzen des Hauptnenners ergibt die x-Werte, die aus der Definitionsmenge ausgeschlossen werden müssen.], 3) Multiplikation der Bruchgleichung mit dem Hauptnenner und Kürzen der einzelnen Brüche [Dabei sind Bruchgleichungen mit dem Hauptnenner zu multiplizieren, so dass: a) jeder Summand in der Gleichung mit dem Hauptnenner multipliziert wird, b) im Falle eines Bruchs als Summand Hauptnenner und Nenner des Bruchs zu kürzen sind.], 4) Ausmultiplizieren der mit dem Hauptnenner malgenommenen und gekürzten Terme [Summen, Differenzen beachten], 5) Sortieren nach x^2, x und einfachen Zahlen, z.B. durch Addition und Subtraktion von Summanden zur Erzeugung einer Null auf einer Seite der Gleichung, 6) Auflösen der so erhaltenen linearen oder quadratischen Gleichung nach x, z.B. mit Hilfe der p-q-Formel, 7) Probe zum Abgleich von Lösungsmenge und Definitionsmenge.

Die geschilderte Vorgehensweise gilt unter der Voraussetzung, dass Bruchgleichungen auf lineare bzw. quadratische Gleichungen zurückgeführt werden können.

Formvariablen (oder Parameter) werden dabei behandelt wie normale Zahlen, werden also als feste reelle Größen vorausgesetzt.

II. Wir gehen wie folgt vor: a) Die *Bestimmung des Hauptnenners* als kleinstes gemeinsames Vielfaches der drei Nenner ergibt: (x+a)(x+b) als Hauptnenner.

b) Für die *Bestimmung der Definitionsmenge* der Bruchgleichung gilt: Der Hauptnenner ist 0 bei:

(x+a)(x+b) = 0 ⇔ x+a = 0, x+b = 0 ⇔ x = -a, x = -b.

Die gefundenen x-Werte sind also auszuschließen, so dass hinsichtlich der gesuchten Definitionsmenge: D = **R**\{-a; -b} gilt.

c) Bei der *Bestimmung der Lösungsmenge* der Bruchgleichung gehen wir mittels Gleichungsumformungen wie folgt vor:

$$\frac{bx}{x+a} - \frac{bx}{x+b} = \frac{2b-2a}{(x+a)(x+b)} \qquad | \cdot(x+a)(x+b)$$

$$\frac{bx}{x+a}(x+a)(x+b) - \frac{bx}{x+b}(x+a)(x+b) = \frac{2b-2a}{(x+a)(x+b)}(x+a)(x+b) \qquad | \text{ Kürzen}$$

$$bx(x+b) - bx(x+a) = 2b-2a \qquad | \text{ Klammern auflösen}$$

$$bx^2 + b^2x - bx^2 - abx = 2b-2a \qquad | \text{ Zusammenfassen}$$

$$b^2x - abx = 2b-2a \qquad | \text{ Ausklammern}$$

$$(b^2 - ab)x = 2b-2a \;\; (*) \qquad | :(b^2-ab)$$

$x = \frac{2b - 2a}{b^2 - ab}$ | Ausklammern

$x = \frac{2(b-a)}{b(b-a)}$ | Kürzen

$x = \frac{2}{b}$

Der Wert $x = \frac{2}{b}$ ist Lösung der Bruchgleichung, vorausgesetzt, dass in der Gleichung (*) der Ausdruck b^2–ab ≠ 0 gilt, so dass erfüllt ist:

b^2–ab ≠ 0
b(b–a) ≠ 0
b ≠ 0 *und* b–a ≠ 0
b ≠ 0 *und* b ≠ a.

Die Lösungsmenge ist hier: $L_{a\neq b,\, b\neq 0} = \{\frac{2}{b}\}$.

Im Fall, dass b = 0 *oder* a = b gilt, ergibt sich die Äquivalenz von (*) zum Ausdruck:

$0 = 2b - 2a$,

woraus folgt: 0 = 2b–2a ⇔ 2a = 2b ⇔ a = b. Für a=b (auch mit b=0) wird die Gleichung (*) zum Ausdruck: 0 = 0 und damit zu einer allgemeingültigen Gleichung, so dass hier die Lösungsmenge $L_{a=b}$ = D = **R**\{-a; -b} greift. Ist hingegen b=0 und a≠b=0, also: b=0 und a≠0, so wird die Gleichung (*) zu: 0 = -2a mit Widerspruch und somit leerer Lösungsmenge $L_{b=0,\, a\neq 0}$ = {}.

www.michael-buhlmann.de / 03.2017 / Aufgabe 324