Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Algebra
> Bruchgleichungen

Aufgabe: Bestimme Definitions- und Lösungsmenge der Bruchgleichung:

$$\frac{3(x+3)}{(x+2)^2} = \frac{2x+5}{2x+4} + \frac{5x+2}{x+2}.$$

1. Lösung: I. Allgemein gilt für das Lösen von Bruchgleichungen, also von Gleichungen z.B. mit der Variablen x, die Brüche enthalten, die folgende Vorgehensweise:

1) Bestimmung des Hauptnenners aus den Nennern der Einzelbrüche der Bruchgleichung [Der Hauptnenner ist das kleinste gemeinsame Vielfache der in den Nennern der Einzelbrüche vorhandenen Faktoren. Die Nenner der Einzelbrüche sind also in Faktoren zu zerlegen, der Hauptnenner wird als Produkt aus allen Faktoren gebildet, wobei gleiche Faktoren verschiedener Nenner der Einzelbrüche nur einmal zum Hauptnenner beitragen.], 2) Bestimmung der Definitionsmenge aus dem Hauptnenner [Nullsetzen des Hauptnenners ergibt die x-Werte, die aus der Definitionsmenge ausgeschlossen werden müssen.], 3) Multiplikation der Bruchgleichung mit dem Hauptnenner und Kürzen der einzelnen Brüche [Dabei sind Bruchgleichungen mit dem Hauptnenner zu multiplizieren, so dass: a) jeder Summand in der Gleichung mit dem Hauptnenner multipliziert wird, b) im Falle eines Bruchs als Summand Hauptnenner und Nenner des Bruchs zu kürzen sind.], 4) Ausmultiplizieren der mit dem Hauptnenner malgenommenen und gekürzten Terme [Summen, Differenzen beachten], 5) Sortieren nach x^2, x und einfachen Zahlen, 6) Auflösen der so erhaltenen linearen oder quadratischen Gleichung nach x, 7) Probe zum Abgleich von Lösungsmenge und Definitionsmenge.

II. Wir gehen wie folgt vor: a) Der *Hauptnenner* ist das Produkt der in der Gleichung vorkommenden, eventuell in Faktoren zerlegten Nenner: $(x+2)^2$; $2(x+2)$, $(x+2)$, also: $2(x+2)^2$.

b) Für die *Bestimmung der Definitionsmenge* der Bruchgleichung gilt: Der Hauptnenner ist 0 bei:

$2(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x+2 = 0 \Leftrightarrow x=-2$.

Der gefundene x-Wert ist also auszuschließen, so dass hinsichtlich der gesuchten Definitionsmenge: $D = \mathbf{R}\backslash\{-2\}$ gilt.

c) Bei der *Bestimmung der Lösungsmenge* der Bruchgleichung multiplizieren wir mit dem Hauptnenner und gehen mittels Gleichungsumformungen wie folgt vor:

$$\frac{3(x+3)}{(x+2)^2} = \frac{2x+5}{2x+4} + \frac{5x+2}{x+2}$$ (Faktorisieren des Nenners 2x+4)

$$\frac{3(x+3)}{(x+2)^2} = \frac{2x+5}{2(x+2)} + \frac{5x+2}{x+2}$$ $| \cdot 2(x+2)^2$ (Hauptnennermultiplikation)

$$\frac{3(x+3)}{(x+2)^2} \cdot 2(x+2)^2 = \frac{2x+5}{2(x+2)} \cdot 2(x+2)^2 + \frac{5x+2}{x+2} \cdot 2(x+2)^2$$ (Kürzen)

$$3(x+3) \cdot 2 = (2x+5)(x+2) + (5x+2) \cdot 2(x+2)$$ (Ausmultiplizieren)

$$6x+18 = (2x^2+4x+5x+10) + 2(5x^2+10x+2x+4)$$ (Zusammenfassen)

$$6x+18 = 2x^2+9x+10+2(5x^2+12x+4)$$ (Ausmultiplizieren)

$6x+18=2x^2+9x+10+10x^2+24x+8$ (Zusammenfassen)

$6x+18=12x^2+33x+18$ | -6x

$18=12x^2+27x+18$ | -18

$0=12x^2+27x$ | :12

$x^2+2{,}25x=0$ (p-q-Formel: p=2,25, q=0)

$x=-1{,}125\pm\sqrt{1{,}125^2-0}=-1{,}125\pm1{,}125$

x_1 = -1,125-1,125 = -2,25, x_2 = -1,125+1,125 = 0 (Lösungen)

Die Zahlen x = -2,25 und x = 0 sind die Lösungen der Bruchgleichung, da sie laut Definitionsmenge D = **R**\{-2} nicht ausgeschlossen wurden. Also gilt für die Lösungsmenge: L = {-2,25; 0}.

2. Lösung: I. Allgemein gilt für das Lösen von Bruchgleichungen, also von Gleichungen z.B. mit der Variablen x, die Brüche enthalten, die folgende Vorgehensweise:

1) Bestimmung des Hauptnenners aus den Nennern der Einzelbrüche der Bruchgleichung [Der Hauptnenner ist das kleinste gemeinsame Vielfache der in den Nennern der Einzelbrüche vorhandenen Faktoren. Die Nenner der Einzelbrüche sind also in Faktoren zu zerlegen, der Hauptnenner wird als Produkt aus allen Faktoren gebildet, wobei gleiche Faktoren verschiedener Nenner der Einzelbrüche nur einmal zum Hauptnenner beitragen.], 2) Bestimmung der Definitionsmenge aus dem Hauptnenner [Nullsetzen des Hauptnenners ergibt die x-Werte, die aus der Definitionsmenge ausgeschlossen werden müssen.], 3) Multiplikation der Bruchgleichung mit dem Hauptnenner und Kürzen der einzelnen Brüche [Dabei sind Bruchgleichungen mit dem Hauptnenner zu multiplizieren, so dass: a) jeder Summand in der Gleichung mit dem Hauptnenner multipliziert wird, b) im Falle eines Bruchs als Summand Hauptnenner und Nenner des Bruchs zu kürzen sind.], 4) Ausmultiplizieren der mit dem Hauptnenner malgenommenen und gekürzten Terme [Summen, Differenzen beachten], 5) Sortieren nach x^2, x und einfachen Zahlen, 6) Auflösen der so erhaltenen linearen oder quadratischen Gleichung Gleichung nach x, 7) Probe zum Abgleich von Lösungsmenge und Definitionsmenge.

II. Wir gehen wie folgt vor: a) Der *Hauptnenner* ist das Produkt der in der Gleichung vorkommenden, eventuell in Faktoren zerlegten Nenner: $(x+2)^2$; 2(x+2), (x+2), also: $2(x+2)^2$.

b) Für die *Bestimmung der Definitionsmenge* der Bruchgleichung gilt: Der Hauptnenner ist 0 bei:
$2(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x+2 = 0 \Leftrightarrow x=-2$.

Der gefundene x-Wert ist also auszuschließen, so dass hinsichtlich der gesuchten Definitionsmenge: D = **R**\{-2} gilt.

c) Bei der *Bestimmung der Lösungsmenge* der Bruchgleichung multiplizieren wir mit dem Hauptnenner und gehen mittels Gleichungsumformungen wie folgt vor:

$\frac{3(x+3)}{(x+2)^2}=\frac{2x+5}{2x+4}+\frac{5x+2}{x+2}$ (Faktorisieren des Nenners 2x+4)

$\frac{3(x+3)}{(x+2)^2}=\frac{2x+5}{2(x+2)}+\frac{5x+2}{x+2}$ | $\cdot 2(x+2)^2$ (Hauptnennermultiplikation)

$\frac{3(x+3)}{(x+2)^2}\cdot2(x+2)^2=\frac{2x+5}{2(x+2)}\cdot2(x+2)^2+\frac{5x+2}{x+2}\cdot2(x+2)^2$ (Kürzen)

$3(x+3)\cdot2=(2x+5)(x+2)+(5x+2)\cdot2(x+2)$ (Ausmultiplizieren)

$6x+18=(2x^2+4x+5x+10)+2(5x^2+10x+2x+4)$ (Zusammenfassen)

$6x+18=2x^2+9x+10+2(5x^2+12x+4)$ (Ausmultiplizieren)

$6x+18=2x^2+9x+10+10x^2+24x+8$ (Zusammenfassen)

$6x+18=12x^2+33x+18$ | -6x

$18=12x^2+27x+18$ | -18

$0=12x^2+27x$ (a-b-c-Formel: a=12, b=27, c=0)

$$x = \frac{-27 \pm \sqrt{27^2 - 4 \cdot 12 \cdot 0}}{2 \cdot 12} = \frac{-27 \pm \sqrt{27^2}}{24} = \frac{-27 \pm 27}{24}$$

$$x_1 = \frac{-27-27}{24} = \frac{-54}{24} = -\frac{9}{4} = -2{,}25\,,\ x_2 = \frac{-27+27}{24} = \frac{0}{24} = 0$$

x_1 = -2,25, x_2 = 0 (Lösungen)

Die Zahlen x = -2,25 und x = 0 sind die Lösungen der Bruchgleichung, da sie laut Definitionsmenge D = **R**\{-2} nicht ausgeschlossen wurden. Also gilt für die Lösungsmenge: L = {-2,25; 0}.

3. Lösung: I. Allgemein gilt für das Lösen von Bruchgleichungen, also von Gleichungen z.B. mit der Variablen x, die Brüche enthalten, die folgende Vorgehensweise:

1) Bestimmung des Hauptnenners aus den Nennern der Einzelbrüche der Bruchgleichung [Der Hauptnenner ist das kleinste gemeinsame Vielfache der in den Nennern der Einzelbrüche vorhandenen Faktoren. Die Nenner der Einzelbrüche sind also in Faktoren zu zerlegen, der Hauptnenner wird als Produkt aus allen Faktoren gebildet, wobei gleiche Faktoren verschiedener Nenner der Einzelbrüche nur einmal zum Hauptnenner beitragen.], 2) Bestimmung der Definitionsmenge aus dem Hauptnenner [Nullsetzen des Hauptnenners ergibt die x-Werte, die aus der Definitionsmenge ausgeschlossen werden müssen.], 3) Multiplikation der Bruchgleichung mit dem Hauptnenner und Kürzen der einzelnen Brüche [Dabei sind Bruchgleichungen mit dem Hauptnenner zu multiplizieren, so dass: a) jeder Summand in der Gleichung mit dem Hauptnenner multipliziert wird, b) im Falle eines Bruchs als Summand Hauptnenner und Nenner des Bruchs zu kürzen sind.], 4) Ausmultiplizieren der mit dem Hauptnenner malgenommenen und gekürzten Terme [Summen, Differenzen beachten], 5) Sortieren nach x^2, x und einfachen Zahlen, 6) Auflösen der so erhaltenen linearen oder quadratischen Gleichung nach x, 7) Probe zum Abgleich von Lösungsmenge und Definitionsmenge.

II. Wir gehen wie folgt vor: a) Der *Hauptnenner* ist das Produkt der in der Gleichung vorkommenden, eventuell in Faktoren zerlegten Nenner: $(x+2)^2$; 2(x+2), (x+2), also: $2(x+2)^2$.

b) Für die *Bestimmung der Definitionsmenge* der Bruchgleichung gilt: Der Hauptnenner ist 0 bei:

$2(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x+2 = 0 \Leftrightarrow x=-2$.

Der gefundene x-Wert ist also auszuschließen, so dass hinsichtlich der gesuchten Definitionsmenge: D = **R**\{-2} gilt.

c) Bei der *Bestimmung der Lösungsmenge* der Bruchgleichung multiplizieren wir mit dem Hauptnenner und gehen mittels Gleichungsumformungen wie folgt vor:

$$\frac{3(x+3)}{(x+2)^2} = \frac{2x+5}{2x+4} + \frac{5x+2}{x+2}$$ (Faktorisieren des Nenners 2x+4)

$$\frac{3(x+3)}{(x+2)^2} = \frac{2x+5}{2(x+2)} + \frac{5x+2}{x+2}$$ | $\cdot 2(x+2)^2$ (Hauptnennermultiplikation)

$$\frac{3(x+3)}{(x+2)^2} \cdot 2(x+2)^2 = \frac{2x+5}{2(x+2)} \cdot 2(x+2)^2 + \frac{5x+2}{x+2} \cdot 2(x+2)^2$$ (Kürzen)

$3(x+3) \cdot 2 = (2x+5)(x+2) + (5x+2) \cdot 2(x+2)$ (Ausmultiplizieren)

$6x+18 = (2x^2+4x+5x+10) + 2(5x^2+10x+2x+4)$ (Zusammenfassen)

$6x+18 = 2x^2+9x+10+2(5x^2+12x+4)$ (Ausmultiplizieren)

$6x+18 = 2x^2+9x+10+10x^2+24x+8$ (Zusammenfassen)

$6x+18 = 12x^2+33x+18$ | -6x

$18 = 12x^2+27x+18$ | -18

$0 = 12x^2+27x$ (Ausklammern)

x(12x+27) = 0 (Satz vom Nullprodukt)

x = 0, 12x + 27 = 0 | -27

x = 0, 12x = -27 | :12

$x = 0$, $x = -2{,}25$ (Lösungen)

Die Zahlen $x = -2{,}25$ und $x = 0$ sind die Lösungen der Bruchgleichung, da sie laut Definitionsmenge $D = \mathbf{R}\backslash\{-2\}$ nicht ausgeschlossen wurden. Also gilt für die Lösungsmenge: $L = \{-2{,}25; 0\}$.

www.michael-buhlmann.de / 04.2019 / Aufgabe 843