

Mathematikaufgaben

> Differenzialgleichungen

> Explizite Differenzialgleichungen

Aufgabe: Löse die Differenzialgleichung:

$$y' = e^{2x} + x, y(0) = 2.$$

Lösung: I. Allgemein gilt: Die explizite Differenzialgleichung

$$y'(x) = f(x)$$

besitzt als allgemeine Lösung durch Integration das unbestimmte Integral:

$$y(x) = \int f(x)dx + C$$

mit der Integrationskonstante C. Letztere bestimmt sich aus der Anfangsbedingung der Differenzialgleichung $y(a) = b$, so dass sich in eindeutiger Weise eine spezielle Lösung für die Funktion $y(x)$ ergibt.

II. Aus $y' = e^{2x} + x$ folgt zunächst durch Integration

$$y = \int (e^{2x} + x)dx + C = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 + C = \frac{1}{2}(e^{2x} + x^2) + C.$$

Die Bestimmung von C aus der Anfangsbedingung $y(0) = 2$ erfolgt mit:

$$y(0) = \frac{1}{2}(e^{2 \cdot 0} + 0^2) + C = \frac{1}{2} + C = 2 \Leftrightarrow C = 1,5.$$

Die gesuchte Lösung der Differenzialgleichung, die die Anfangsbedingung erfüllt, lautet wegen $C = 1,5$ also:

$$y = \frac{1}{2}(e^{2x} + x^2) + 1,5.$$