Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Differenzialgleichungen
> Explizite Differenzialgleichungen

Aufgabe: Löse die Differenzialgleichung:

$$y' = -\frac{4}{1+x^2}\text{ , y(1) = 0.}$$

Lösung: I. Allgemein gilt: Die explizite Differenzialgleichung

$$y'(x) = f(x)$$

besitzt als allgemeine Lösung durch Integration das unbestimmte Integral:

$$y(x) = \int f(x)dx + C$$

mit der Integrationskonstante C. Letztere bestimmt sich aus der Anfangsbedingung der Differenzialgleichung y(a) = b, so dass sich in eindeutiger Weise eine spezielle Lösung für die Funktion y(x) ergibt.

II. Aus $y' = -\frac{4}{1+x^2}$ folgt zunächst durch Integration

$$y = -\int \frac{4}{1+x^2}dx + C = -4\arctan x + C\text{ .}$$

Die Bestimmung von C aus der Anfangsbedingung y(1) = 0 erfolgt mit:

$$y(1) = -4\arctan(1) + C = -4\cdot\frac{\pi}{4} + C = -\pi + C = 0 \;\Leftrightarrow\; C = \pi.$$

Die gesuchte Lösung der Differenzialgleichung, die die Anfangsbedingung erfüllt, lautet wegen C = π also:

$$y = -4\arctan x + \pi\text{ .}$$

www.michael-buhlmann.de / 05.2015 / Aufgabe 111