Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Differenzialgleichungen
> Exakte Differenzialgleichung

Aufgabe: Löse die Differenzialgleichung:

$$y' = \frac{2y}{x^3} \text{ , } y(1) = 1.$$

Lösung: I. Allgemein gilt: Eine exakte Differenzialgleichung der Form:

$$p(x,y) + q(x,y)y'(x) = 0 \quad (*)$$

liegt vor, wenn für eine stetig differenzierbare Funktion Φ(x,y) die Beziehungen:

$$\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x} = p(x,y) \text{ , } \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y} = q(x,y)$$

gelten, d.h. wenn sich die Differenzialgleichung (*) als verschwindendes totales Differenzial darstellt:

$$d\Phi(x,y) = \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y}dy = p(x,y)dx + q(x,y)dy = 0\,.$$

In dem Fall gilt die Integrabilitätsbedingung:

$$\frac{\partial p(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial q(x,y)}{\partial x}\,.$$

Aus $d\Phi(x,y) = \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y}dy = 0$ lässt sich die Stammfunktion Φ(x,y) (erstes Integral) vermöge Integration berechnen als:

$$\Phi(x,y) = \int p(x,y)dx + \int\left(q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int p(x,y)dx\right)dy = C\,.$$

mit: $\Phi(x,y) = \int p(x,y)dx + \phi(y)$, $\phi(y) = \int\left(q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int p(x,y)dx\right)dy$. Die Lösung der Differenzialgleichung (*) ist damit als: Φ(x,y) = C implizit ermittelt. Bei vorgegebenem Anfangswert $y(x_0) = y_0$ liefert die Anfangsbedingung den Wert für C als: $C = \Phi(x_0,y_0)$.

II. Jede Differenzialgleichung der Form:

$$y'(x) = f(x)\cdot g(y),$$

die mit Hilfe der Trennung der Variablen gelöst werden kann, ist auch eine exakte Differenzialgleichung auf Grund von:

$$y'(x) = f(x)\cdot g(y) \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{g(y)}y'(x) = f(x) \;\Leftrightarrow\; -f(x) + \frac{1}{g(y)}y'(x) = 0$$

mit p(x,y) = -f(x), q(x,y) = $\frac{1}{g(y)}$ und der Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial p(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial q(x,y)}{\partial x} = 0$. Die Lösung der exakten Differenzialgleichung ist wegen $\frac{\partial}{\partial y}\int p(x,y)dx$ = 0:

$$\Phi(x,y) = \int p(x,y)dx + \int q(x,y)dy = C\,.$$

III. Wir lösen die vorgegebene Differenzialgleichung zunächst durch Trennung der Variablen:

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x^3}$ | :(2y)

$\frac{1}{2y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^3}$ | ·dx

$\frac{dy}{2y} = \frac{dx}{x^3}$ (Integration)

$\int \frac{dy}{2y} = \int \frac{dx}{x^3} + C$ (Stammfunktionen)

$\frac{1}{2}\ln|y| = -\frac{1}{2x^2} + C$ | ·2

$\ln|y| = -\frac{1}{x^2} + 2C$ | $e^{()}$

$y = e^{-\frac{1}{x^2}+2C}$.

Einsetzen der Anfangsbedingung y(1) = 1 ergibt:

$y(1) = e^{-\frac{1}{1^2}+2C} = e^{-1+2C} = 1$ ⇔ -1+2C = 0 ⇔ 2C = 1 ⇔ C = 0,5,

so dass sich die gesuchte Funktion y darstellt als:

$y = e^{-\frac{1}{x^2}+1}$.

IV. Wir fassen die vorgegebene Differenzialgleichung als exakte Differenzialgleichung auf und haben:

$y' = \frac{2y}{x^3}$ | :(2y)

$\frac{1}{2y} \cdot y' = \frac{1}{x^3}$ | $-1/x^3$

$-\frac{1}{x^3} + \frac{1}{2y} \cdot y' = 0$

mit $p(x,y) = -1/x^3$, $q(x,y) = 1/(2y)$ und der Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial p(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial q(x,y)}{\partial x} = 0$. Wir ermitteln die Stammfunktion zur exakten Differenzialgleichung Φ(x,y) vermöge:

$$\Phi(x,y) = \int p(x,y)dx + \int q(x,y)dy = \int -\frac{1}{x^3}dx + \int \frac{1}{2y}dy = \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2}\ln|y| = C$$

und haben mit der Nebenbedingung y(1) = 1:

$\Phi(1,1) = \frac{1}{2 \cdot 1^2} + \frac{1}{2}\ln|1| = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2} = C$.

Wir stellen noch um:

$$\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2}\ln|y| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} + \ln|y| = 1 \Leftrightarrow \ln|y| = -\frac{1}{x^2} + 1 \Leftrightarrow y = e^{-\frac{1}{x^2}+1}$$

und erhalten damit die Lösung der Differenzialgleichung:

$y = e^{-\frac{1}{x^2}+1}$.

www.michael-buhlmann.de / 11.2021 / Aufgabe 1522