Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Differenzialgleichungen
> linear, 1. Ordnung

Aufgabe: Löse die lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung:

$$y'-(\tan x)y = 2\sin x \,.$$

Lösung: I. Allgemein gilt: Eine Differenzialgleichung der Form

$$y'+f(x)y = g(x)$$

heißt lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung mit g(x) als Störfunktion. Ist g(x) = 0, so ist die Differenzialgleichung homogen, ansonsten inhomogen. Die homogene lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung hat die Lösung:

$$y = C \cdot e^{-\int f(x)dx} \,,$$

die inhomogene Differenzialgleichung:

$$y = \int g(x) \cdot e^{\int f(x)dx} dx \cdot e^{-\int f(x)dx} + C \cdot e^{-\int f(x)dx} \,.$$

II. Als Gesamtlösung der Differenzialgleichung $y'-(\tan x)y = 2\sin x$ haben wir:

$$y = \int 2\sin x \cdot e^{-\int \tan x dx} dx \cdot e^{\int \tan x dx} + C \cdot e^{\int \tan x dx} = 2\int \sin x \cdot e^{\ln|\cos x|} dx \cdot e^{-\ln|\cos x|} + C \cdot e^{-\ln|\cos x|} =$$

$$2\int \sin x \cdot \cos x dx \cdot \frac{1}{\cos x} + \frac{C}{\cos x} = -2 \cdot \frac{\cos^2 x}{2} \cdot \frac{1}{\cos x} + \frac{C}{\cos x} = -\cos x + \frac{C}{\cos x}$$

Dabei ist nach den Exponential- und Logarithmengesetzen: $e^{\ln|\cos x|} = \cos x$, $e^{-\ln|\cos x|} = \frac{1}{\cos x}$. Weiter ist das Integral $\int \sin x \cdot \cos x dx$ z.B. mit Hilfe der Substitution $z = \cos x$, $z' = \frac{dz}{dx} = -\sin x$ zu lösen: $\int \sin x \cdot \cos x dx = -\int z dz = -\frac{z^2}{2} = -\frac{\cos^2 x}{2}$.

www.michael-buhlmann.de / 06.2015 / Aufgabe 121